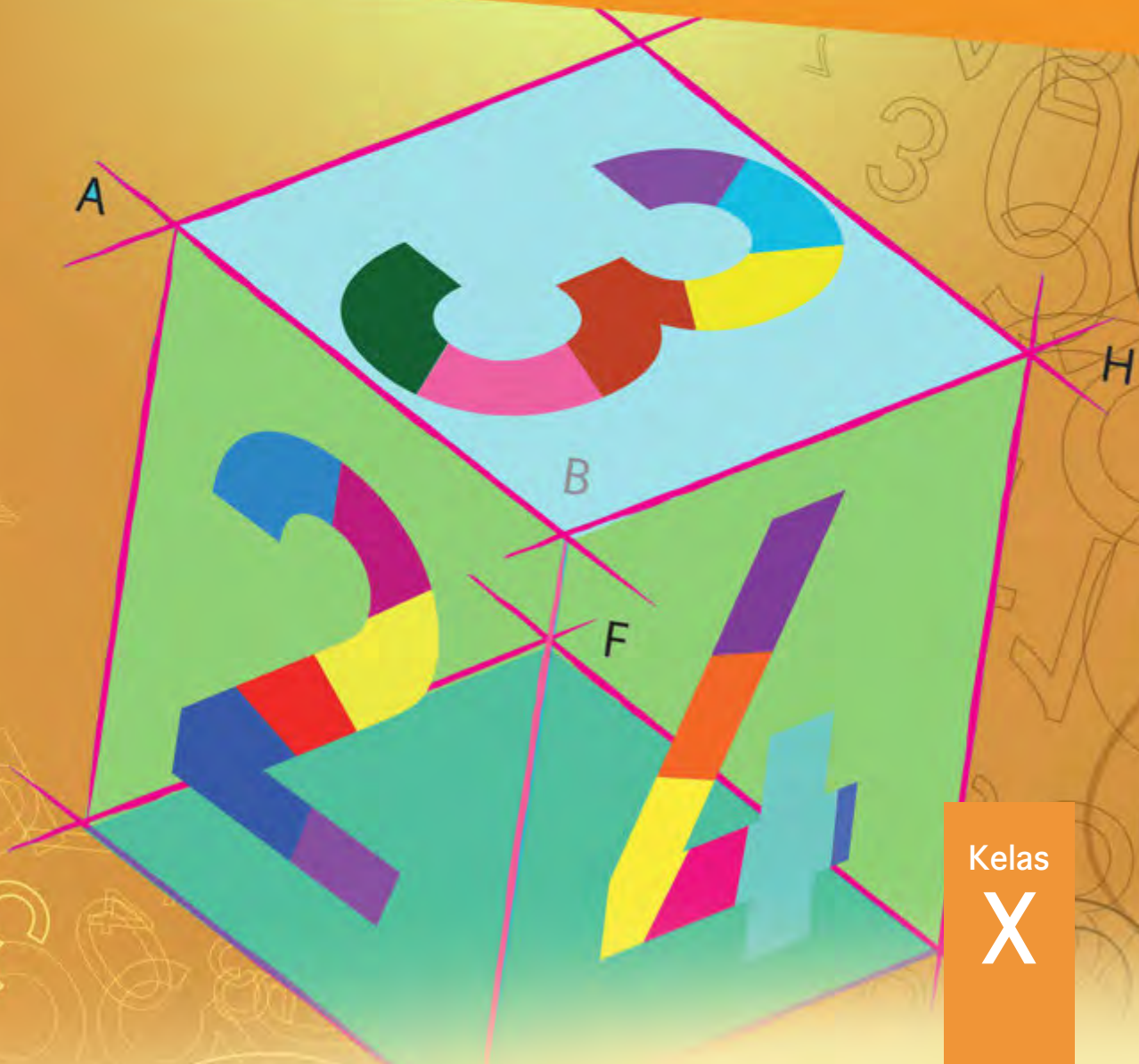




KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
REPUBLIK INDONESIA
2013



MATEMATIKA



Kelas
X

MATEMATIKA

Pembelajaran matematika diarahkan agar peserta didik mampu berpikir rasional dan kreatif, mampu berkomunikasi dan bekerjasama, jujur, konsisten, dan tangguh menghadapi masalah serta mampu mengubah masalah menjadi peluang. Guru memampukan peserta didik untuk menemukan kembali berbagai konsep dan prinsip matematika melalui pemecahan masalah nyata di lingkungan budayanya. Aktivitas peserta didik mengonstruksi berbagai konsep, sifat, dan aturan matematika melalui pemecahan masalah kompleks. Komunikasi dan kerjasama di antara peserta didik dalam memahami, menganalisis, berpikir kritis dan kreatif dalam memecahkan masalah menjadi fokus utama dari guru.

Pembelajaran matematika dalam buku ini mempertimbangkan koneksi matematika dengan masalah nyata, bidang ilmu lain, dan antar materi matematika di dalamnya. Dalam kajian konsep dan prinsip matematika sangat tergantung semesta pembicaraan yang disepakati dan pertimbangan jangkauan kognitif peserta didik di setiap jenjang pendidikan. Misalnya dalam mempelajari limit fungsi, disepakati daerah asal (*domain*) fungsinya adalah himpunan yang banyak anggotanya tak berhingga (*infinite*) untuk pemenuhan titik c sebagai titik kumpul (*cluster point*) dari *domain* fungsi, beberapa konsep juga tidak didefinisikan (*indifine term*), yang harus mendapat perhatian guru. Pola pikir deduktif dengan pendekatan pembelajaran induktif, matematika yang bersifat abstrak dengan pendekatan konkrit, sifat hirarkis dan konsistensi, serta penggunaan variabel atau simbol yang kosong dari arti, merupakan karakteristik matematika yang harus menjadi bahan pertimbangan guru dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas.

ISBN :

978-602-282-103-8

978-602-282-104-5

Hak Cipta © 2013 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

MILIK NEGARA
TIDAK DIPERDAGANGKAN

Dislaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan “dokumen hidup” yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Jakarta:
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2013.
viii, 392 hlm. : illus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA Kelas X

ISBN 978-602-282-103-8(jilid lengkap)

ISBN 978-602-282-104-5 (jilid 1)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

I. Judul

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan J.N.M.S. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Sudianto Manulang, Lasker Pengarapan Sinaga, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito dan Sisworo.
Penyelia Penerbitan : Politeknik Negeri Media Kreatif, Jakarta.

Cetakan Ke-1, 2013

Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas X untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersediaan kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan dan penyempurnaan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Mei 2013

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

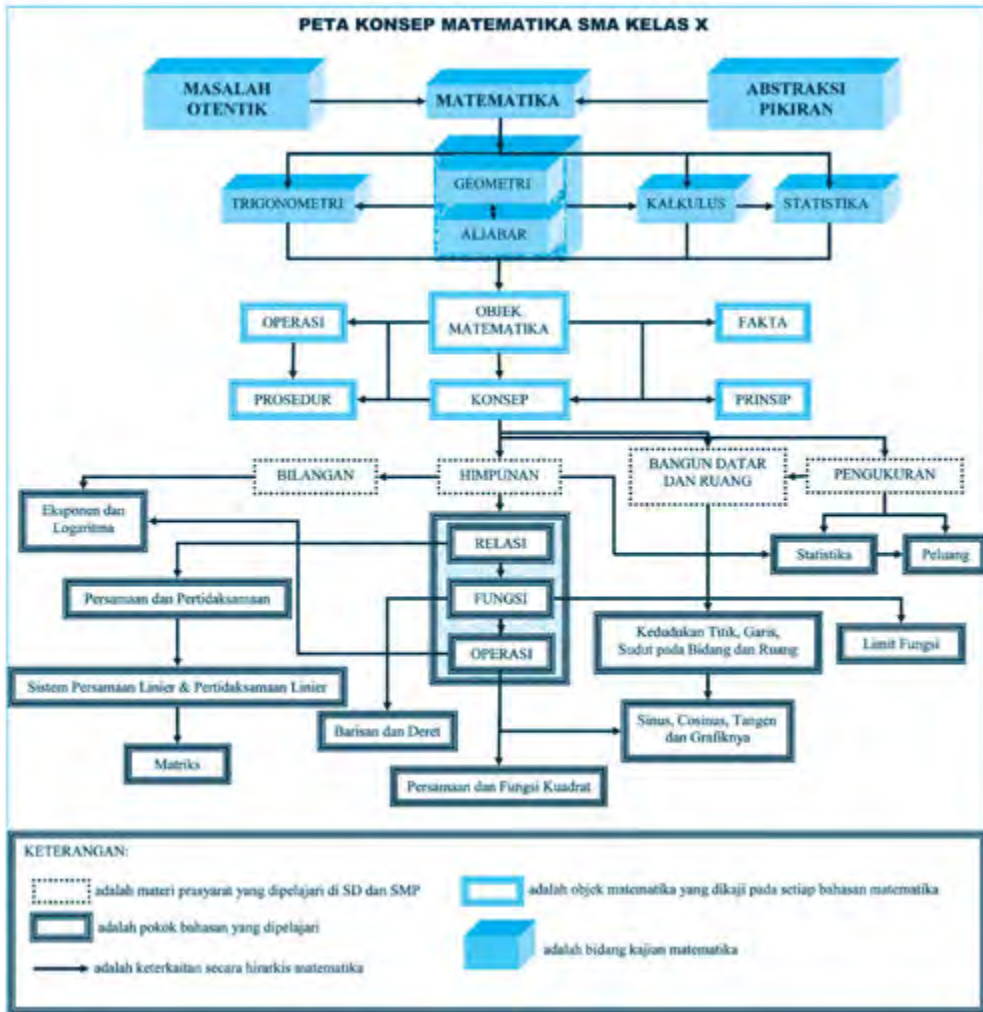
DAFTAR ISI

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv
Peta Konsep Matematika SMA Kelas X	viii
Bab 1 Eksponen dan Logaritma	1
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	1
B. Peta Konsep	2
C. Materi Pembelajaran	3
1. Menemukan konsep Eksponen	3
2. Pangkat Bulat Negatif	8
3. Pangkat Nol	9
4. Sifat-Sifat Pangkat Bulat Positif	9
5. Pangkat Pecahan	15
Uji Kompetensi 1.1	16
6. Bentuk Akar	18
7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat	19
8. Operasi Pada Bentuk Akar	20
a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar	20
b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar	21
c. Merasionalkan Penyebut Berbentuk Akar	22
Uji Kompetensi 1.2	28
9. Menemukan Konsep Logaritma	30
10. Sifat-sifat Logaritma	35
Uji Kompetensi 1.3	42
D. Penutup	42
Bab 2 Persamaan dan Pertidaksamaan Linier	44
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	44
B. Peta Konsep	45
C. Materi Pembelajaran	46
1. Memahami dan Menemukan konsep Nilai Mutlak	46
2. Persamaan Linier	51
Uji Kompetensi 2.1	57
3. Aplikasi Nilai Mutlak Pada Persamaan Linier	59
4. Pertidaksamaan Linier	59
5. Aplikasi Nilai Mutlak pada Pertidaksamaan Linier	64
Uji Kompetensi 2.2	65
D. Penutup	67
Bab 3 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linier	69
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	69
B. Peta konsep	70
C. Materi Pembelajaran	71
1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	71

Uji Kompetensi 3.1	80
2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	81
Uji Kompetensi 3.2	89
3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier	91
a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel	91
b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	95
Uji Kompetensi 3.3	100
4. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	103
Uji kompetensi 3.4	107
D. Penutup	109
Bab 4 Matriks	111
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	111
B. Peta Konsep	112
C. Materi Pembelajaran	113
1. Menemukan Konsep Matriks	113
2. Jenis-Jenis Matriks	120
3. Transpos Matriks	123
4. Kemandirian Dua Matriks	126
Uji Kompetensi 4.1	127
5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah	130
a. Operasi Hitung pada Matriks	130
Uji Kompetensi 4.2	140
6. Determinan dan Invers Matriks	142
Uji Kompetensi 4.3	150
D. Penutup	153
Bab 5 Relasi dan Fungsi	154
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	154
B. Peta Konsep	155
C. Materi Pembelajaran	156
1. Menemukan Konsep Relasi	156
2. Beberapa sifat Relasi	162
3. Menemukan Konsep Fungsi	165
Uji Kompetensi 5.1	174
D. Penutup	176
Bab 6 Barisan dan Deret	177
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	177
B. Peta Konsep	178
C. Materi Pembelajaran	179
1. Menemukan Pola Barisan dan Deret	179
2. Menemukan Kosep Barisan dan Deret Aritmatika	185
a. Barisan Aritmatika	186

b. Induksi Matematika	190
c. Deret Aritmatika	192
Uji Kompetensi 6.1	196
3. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Geometri	198
a. Barisan Geometri	198
b. Deret Geometri	200
Uji Kompetensi 6.2	204
D. Penutup	205
Bab 7 Persamaan dan Fungsi Kuadrat	206
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	206
B. Peta Konsep	207
C. Materi Pembelajaran	208
1. Persamaan Kuadrat	208
a. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Peubah	208
Uji Kompetensi 7.1	219
b. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat	220
c. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Hasil Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat	223
d. Persamaan Kuadrat dengan Akar-Akar x_1 dan x_2	225
Uji Kompetensi 7.2	226
2. Fungsi Kuadrat	227
a. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat	227
Uji Kompetensi 7.3	235
b. Grafik Fungsi Kuadrat	236
c. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat	244
Uji Kompetensi 7.4	244
D. Penutup	245
Bab 8 Trigonometri	247
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	247
B. Peta Konsep	248
C. Materi Pembelajaran	249
1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)	249
Uji Kompetensi 8.1	253
2. Konsep Dasar Sudut	254
3. Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku	256
Uji Kompetensi 9.2	260
4. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa	261
5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30° , 45° , 60°	265
6. Grafik Fungsi Trigonometri	274
Uji Kompetensi 8.3	279
D. Penutup	281
Bab 9 Geometri	282
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	282
B. Peta Konsep	283

C.	Materi Pembelajaran	284
1.	Menemukan Konsep Jarak Titik, Garis, dan Bidang	284
a.	Kedudukan Titik	284
b.	Jarak antara Titik dan Titik	286
c.	Jarak Titik ke Garis	289
d.	Jarak Titik ke Bidang	292
e.	Jarak antara Dua Garis dan Dua Bidang yang Sejajar	296
Uji Kompetensi 9.1	297
2.	Menemukan Konsep Sudut pada Bangun Ruang	298
a.	Sudut antara Dua Garis dalam ruang	301
b.	Sudut antara Garis dan Bidang pada Bangun Ruang	303
c.	Sudut antara Dua Bidang pada Bangun Ruang	307
Uji Kompetensi 9.2	310
D.	Penutup	312
Bab 10	Limit Fungsi	314
A.	Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	314
B.	Peta Konsep	315
C.	Materi Pelajaran	316
1.	Menemukan Konsep Limit	316
2.	Sifat-Sifat Limit Fungsi	326
3.	Menentukan Nilai Limit Fungsi	331
Ui Kompetensi 10.1	337
D.	Penutup	338
Bab 11	Statistika	340
A.	Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	340
B.	Peta Konsep	341
C.	Materi Pembelajaran	342
1.	Data Tunggal	342
Uji Kompetensi 11.1	353
2.	Penyajian Data Kelompok	355
Uji Kompetensi 11.2	361
D.	Penutup	362
Bab 12	Peluang	364
A.	Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar	364
B.	Peta Konsep	365
C.	Materi Pembelajaran	366
1.	Menemukan Konsep Peluang dengan Frekuensi Relatif	366
2.	Pengertian Percobaan, Kejadian, Titik Sampel, dan ruang Sampel ...	371
3.	Cara Penyajian dan Penentuan Ruang Sampel	374
Uji Kompetensi 12.1	384
4.	Peluang Komplemen Suatu Kejadian	385
Uji Kompetensi 12.2	388
D.	Penutup	390
Daftar Pustaka	391



Bab 1

Eksponen dan Logaritma

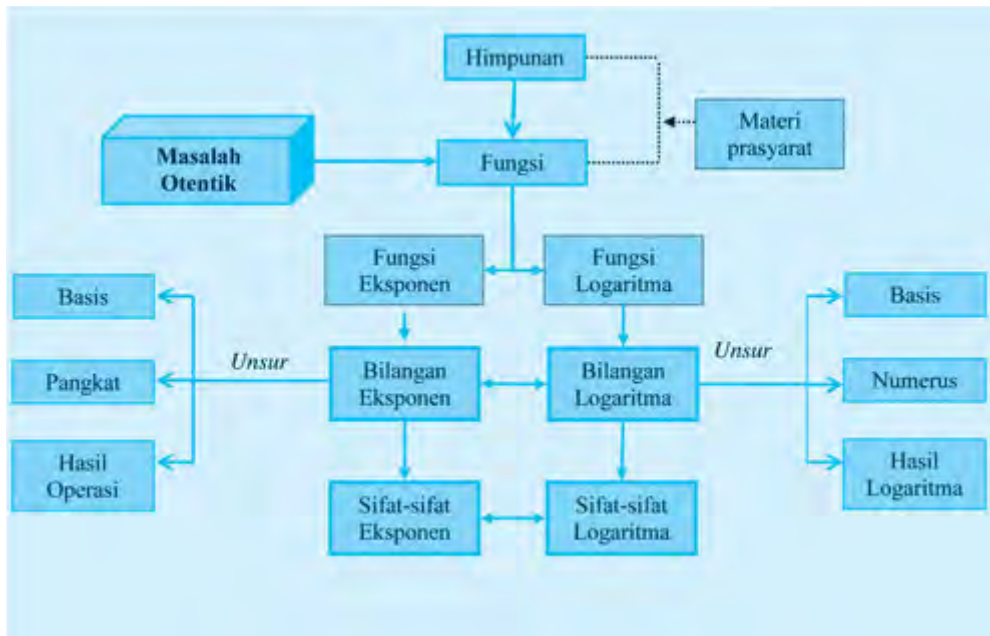
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran eksponen dan logaritma siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. memilih dan menerapkan aturan eksponen dan logaritma sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya;3. menyajikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat-sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.	<p>Melalui pembelajaran materi eksponen dan logaritma, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait eksponen dan logaritma;• merancang model Matematika dari sebuah permasalahan autentik yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma;• menyelesaikan model Matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan;• menafsirkan hasil pemecahan masalah;• membuktikan berbagai sifat terkait eksponen dan logaritma;• menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep persamaan kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya;• membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma berdasarkan konsep yang sudah dimiliki;• menerapkan berbagai sifat eksponen dan logaritma dalam pemecahan masalah.

Istilah Penting

- *Bilangan Pokok (Basis)*
- *Perpangkatan*
- *Eksponen*
- *Logaritma*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Banyak permasalahan kehidupan yang penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD/MI, SMP/MTs, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Pegang teguh sifat matematika; yaitu, matematika bersandar pada kesepakatan, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, dan bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi; artinya, tidak boleh ada di dalamnya unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, rumus-rumus yang saling bertentangan. Jika sebuah konsep ditemukan, ukuran kebenarannya adalah apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

1. Menemukan Konsep Eksponen

Untuk menemukan konsep eksponen, kamu selesaikan masalah yang disajikan di bawah ini secara berkelanjutan. Kamu lebih dahulu berusaha memikirkan, berupaya mencari ide-ide kreatif, berdiskusi, mencoba memecahkan masalah di dalam kelompok belajar. Dari beberapa model matematika yang melibatkan eksponen, kamu secara individu menuliskan ciri-ciri eksponen dan mendiskusikan hasilnya dengan temanmu. Berdasarkan ciri-ciri tersebut, kamu menuliskan konsep eksponen dengan pemahaman sendiri.



Masalah-1.1

Seorang peneliti bidang mikrobiologi di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tersebut, satu bakteri membelah menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Peneliti tersebut ingin mengetahui banyak bakteri sebagai hasil pembelahan dan mencari tahu banyak bakteri dalam waktu 8 jam.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Satu bakteri membelah menjadi r bakteri untuk setiap jam.

Jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlahnya menjadi 40.000 bakteri.

Ditanya:

- Berapa banyak bakteri sebagai hasil pembelahan.
- Berapa jumlah bakteri dalam waktu 8 jam.

Sebagai langkah awal buat tabel laju pertumbuhan bakteri terhadap waktu setiap jam.

Misalkan jumlah bakteri pada awalnya ($t = 0$) adalah x_0 . Isilah tabel berikut!

Jam ke- t	0	1
Jumlah bakteri (x_t)	x_0	rx_0

Dari hasil pengamatan data pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan pertumbuhan jumlah bakteri (x_t) tersebut terhadap perubahan waktu (t).

$x_t = \underbrace{r \times r \times r \times \dots \times r}_{t \text{ faktor}} \times x_0$ atau secara ringkas ditulis

$$x_t = r^t x_0 \dots \dots \dots (1)$$

dengan t dalam jam, x_0 adalah jumlah bakteri saat $t = 0$ dan r adalah banyak bakteri setelah pembelahan terjadi pada setiap jam.

Pada Masalah-1.1 diketahui bahwa pada akhir 3 jam terdapat 10.000 bakteri dan setelah 5 jam terdapat 40.000 bakteri. Kita substitusi ke formula di atas, maka diperoleh $x_3 = r^3 x_0 = 10.000$ dan $x_5 = r^5 x_0 = 40.000$

$$\frac{x_5}{x_3} = \frac{40.000}{10.000}$$

$$\frac{r^5 x_0}{r^3 x_0} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa setiap jam 1 bakteri membelah menjadi 2 bakteri.

Untuk mendapatkan banyak bakteri pada awalnya atau $t = 0$, substitusi $r = 2$ ke persamaan $r^3 x_0 = 10.000$ sehingga $8x_0 = 10.000$. Dengan demikian $x_0 = 1.250$.

Substitusikan $x_0 = 1.250$ ke persamaan (1), pola pertumbuhan bakteri tersebut dinyatakan

$$x_t = 1250 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$$

$$x_8 = (2^8)(1250)$$

$$= 320.000$$

Dalam Masalah-1.1, ditemukan $r^2 = 4$ maka $r = 2$. Apakah $r = -2$ tidak berlaku? Berikan alasanmu.

Jadi, setelah 8 jam, peneliti mendapatkan jumlah bakteri sudah mencapai 320.000 bakteri.



Masalah-1.2

Diberikan selembar kertas berbentuk persegi panjang. Lipatlah kertas tersebut di tengah-tengah sehingga garis lipatan membagi dua bidang kertas menjadi dua bagian yang sama. Temukanlah pola yang menyatakan hubungan banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Alternatif Penyelesaian

Sebagai langkah awal buat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Banyak Lipatan	Banyak Bidang Kertas	Pola Perkalian
1	2	$2 = 2$
2	4	$4 = 2 \times 2$
3	8	$8 = 2 \times 2 \times 2$
4
5
N

Berdasarkan tabel di atas, misalkan k adalah banyak bidang kertas yang terbentuk sebagai hasil lipatan bidang permukaan kertas menjadi dua bagian yang sama, n adalah banyak lipatan.

k dapat dinyatakan dalam n , yaitu

$$k_n = 2^n \dots\dots\dots (2)$$

Coba kamu uji kebenaran persamaan $k_n = a^n$ dengan mensubstitusikan nilai n dan a ke persamaan tersebut.

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh

Dari persamaan (1) $x_t = r^t x_0$, r adalah bilangan pokok dan t adalah eksponen dari r .

Dari persamaan (2) $k_n = a^n$, a adalah bilangan pokok dan n adalah eksponen dari a .

Untuk menyederhanakan penulisan hasil kali bilangan yang sama, kita dapat menggunakan *notasi pangkat*. Bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 1.1

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. a^n adalah hasil kali bilangan a sebanyak n faktor, dapat ditulis $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}$ dengan a sebagai *basis* bilangan pokok dan n sebagai pangkat.

Catatan:

1. Pada Definisi-1.1 di atas, kita sepakati, a^1 cukup ditulis a .
2. Hati-hati dengan bilangan pokok $a = 0$, tidak semua a^0 dengan a bilangan real hasilnya adalah 1. Coba tanyakan pada gurumu, mengapa demikian?
3. Jika n adalah sebuah variabel (variabel sebagai eksponen dari a), maka perlu dicermati semestanya dimana variabel itu dibicarakan. Sebab $a^n = a \times a \times \dots \times a$ sebanyak n faktor, ini hanya berlaku ketika semesta $n \in \mathbb{N}$.

Perhatikan Masalah-1.3 berikut!



Masalah-1.3

Suatu zat yang disuntikkan ke dalam tubuh manusia akan dikeluarkan dari darah melalui ginjal. Setiap 1 jam separuh zat itu dikeluarkan oleh ginjal. Bila 100 mg zat itu disuntikkan ke tubuh manusia, berapa miligram zat itu yang tersisa dalam darah setelah:

- 1) $t = 1$ jam?
- 2) $t = 2$ jam?
- 3) $t = 3$ jam?
- 4) Buatlah model matematika pengurangan zat tersebut dari tubuh melalui ginjal!
- 5) Gambarlah grafik model persamaan yang ditemukan!

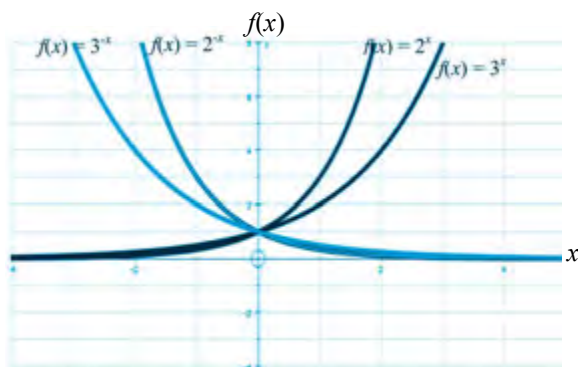
Alternatif Penyelesaian

Langkah awal isilah tabel berikut:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Jumlah zat $z(t)$	50	25	12,5

Isilah secara lengkap data pada tabel dan coba gambarkan pasangan titik-titik tersebut pada sistem koordinat kartesius!

Selanjutnya perhatikan grafik fungsi (Gambar 1.1) di bawah ini. Isilah nilai-nilai yang dilalui fungsi tersebut dan sajikan nilai-nilai tersebut pada tabel yang diberikan.



Gambar 1.1 Grafik fungsi eksponen

	x							
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 2^{-x}$								
$f(x) = 3^x$								
$f(x) = 3^{-x}$								

Latihan 1.1

Amati grafik di atas. Tuliskan sedikitnya 5 (lima) sifat grafik fungsi eksponen dan presentasi hasilnya di depan kelas. Dalam paparan jelaskan mengapa kita perlu mengetahui sifat-sifat tersebut!



Definisi 1.2

Fungsi Eksponen adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $y = f(x) = a(b^{cx})$ dengan a , b , dan c bilangan real.

x adalah variabel

b adalah bilangan pokok atau basis

c adalah koefisien x

cx adalah eksponen dari b .

2. Pangkat Bulat Negatif



Definisi 1.3

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, didefinisikan

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Definisi di atas dijelaskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a^{-m} &= \left(\frac{1}{a}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\dots\left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{sebanyak } m \text{ faktor}} \\
 &= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}} \\
 &= \frac{1}{a^m}
 \end{aligned}$$



Contoh 1.1

Jika nilai $x = -2$ dan $y = 2$, tentukan nilai $x^{-3}(y^4) = \dots$

Penyelesaian:

$$x^{-3}(y^4) = \frac{y^4}{x^3} = \frac{2^4}{(-2)^3} = \frac{16}{-8} = -2$$

3. Pangkat Nol



Definisi 1.4

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan pola hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut dengan bilangan 0.

$$\begin{array}{ll} 2^3 = 8 & 3^3 = 27 \\ 2^2 = 4 & 3^2 = 9 \\ 2^1 = 2 & 3^1 = 3 \\ 2^0 = 1 & 3^0 = 1 \end{array}$$

Perhatikan hasil pemangkatan 2 dengan 0, dan hasil pemangkatan 3 dengan 0, hasil pemangkatannya adalah 1.

4. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Coba buktikan sifat-sifat pangkat bulat positif menggunakan definisi bilangan berpangkat yang telah dipelajari sebelumnya.

Sifat-1

Jika a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_m \text{ faktor} \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ faktor} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a}_{m+n} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

- Perhatikan $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_m \text{ faktor}$.

Diskusikan dalam kelompokmu, apakah benar perpangkatan adalah perkalian berulang?

- Bagaimana jika a bukan bilangan?
- Bagaimana jika m dan n bukan bilangan bulat positif?

Sifat-2

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}} \text{ (sesuai definisi)}$$

- Pada persyaratan Sifat-2, Apa arti $a \neq 0$?
- Bagaimana jika $a = 0$? Apa dampaknya pada hasil pembagian? $\frac{a^m}{a^n}$? Jika kamu tidak tahu, tanya pada guru!

Pada Sifat-1 di atas, terkait bilangan bulat positif m dan n . Ada 3 (tiga) kemungkinan, yaitu (a) $m > n$, (b) $m = n$, dan (c) $m < n$.

a) Kasus $m > n$

Jika m dan n bilangan bulat positif dan $m > n$ maka $m - n > 0$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}}} \dots \times a \left(\dots \right) \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{(m-n) \text{ faktor}} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

Jadi $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$, dengan m, n bilangan bulat positif dan $m > n$

b) Kasus $m = n$

Jika $m = n$, maka $\frac{a^m}{a^n} = 1$.

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}, \text{ sebab } m = n$$

$$= \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= 1$$

$$= a^0 \text{ (hal ini sesuai dengan Definisi 1.4).}$$

$$= a^{m-n}$$

Latihan 1.2

Buktikan sendiri untuk $m < n$. Jelaskan perbedaannya dengan kasus (a).

Sifat-3

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n adalah bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti:

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \dots \times a^m}_{n \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{\left(\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}} \right) \left(\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}} \right) \left(\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}} \right) \dots \left(\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}} \right)}_{n \text{ faktor}} \\ &= \left(\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \times n \text{ faktor}} \right)\end{aligned}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \text{ (terbukti)}$$



Definisi 1.4

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif. $a^{\frac{1}{m}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^m = a$.



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu, apakah syarat m dan n bilangan positif diperlukan untuk Sifat 3 dan Sifat 4. Bagaimana jika m dan n adalah salah satu atau keduanya bilangan negatif.



Contoh 1.2

(a) Buktikan jika $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ dan $n > m$, maka $a^n > a^m$!

Bukti:

Karena $a > 1$ dan $n > m$ maka $n - m > 0$ dan $a^n > 0$, $a^m > 0$. Akibatnya, berlaku

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (\text{Lihat Sifat-1 di atas})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} > 1 \quad (\text{Mengapa } \frac{a^n}{a^m} > 1? \text{ Beri alasanmu!})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} \times a^m > 1 \times a^m \quad (\text{Karena } a^m > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^n > a^m \quad (\text{terbukti})$$

(b) Perlukah syarat $a > 1$?

Misalkan kita ambil a bilangan real yang memenuhi $a < 1$ dan $n > m$. Apakah yang terjadi?

Pilih $a = -2$, dengan $n > m$, pilih $n = 3$ dan $m = 2$, apakah yang terjadi?

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

Dengan demikian, $a^n = -8 < 4 = a^m$ atau $a^n < a^m$. Jadi, tidak benar bahwa $a^n > a^m$ bila $a < 1$ dan $n > m$. Jadi, syarat a adalah bilangan real, dan $a > 1$ dan $n > m$ tidak boleh dikurangi (syarat cukup) untuk membuktikan $a^n > a^m$.



Diskusi

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok. Analisis pernyataan pada Contoh 1.2!

- Apa akibatnya bila syarat $a > 1$ tidak dipenuhi?
- Perlukah diperkuat dengan syarat $n > m > 0$? Jelaskan!
- Bolehkah syarat $a > 1$ di atas diganti $a \geq 1$? Jelaskan!
- Bila tidak boleh, modifikasi ketentuan di atas supaya berlaku untuk $a \geq 1$. Bagaimanakah bila $0 < a < 1$ dan $a < 0$?
- Buat aturan hubungan antara a^n dan a^m untuk bermacam-macam nilai a di atas!
- Buat laporan terkait hasil diskusi kelompokmu.



Contoh 1.3

Terapkan berbagai sifat eksponen untuk menentukan hasil operasi bilangan pada soal yang disajikan pada contoh. Ujilah kebenaran hasilnya!

1. $2^2 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ faktor}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ faktor}}$ dengan menggunakan Sifat-1

$$\begin{aligned} &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7 \text{ faktor}} \\ &= 2^7 \\ &= 2^{2+5} \end{aligned}$$

2. $\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ dengan menggunakan Sifat-2 kasus b

$$= 2^0$$

3. $(2^3)^2 = (2^3) \times (2^3)$ dengan menggunakan Sifat-3

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ faktor}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ faktor}} \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

4. $(2 \times 3)^3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$$\begin{aligned} &= \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ faktor}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ faktor}} \\ &= 2^3 \times 3^3 \end{aligned}$$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$$\begin{aligned} &= \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2}^{3 \text{ faktor}}}{\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ faktor}}} \\ &= \frac{2^3}{3^3} \end{aligned}$$



Diskusi

- Diskusikan dengan temanmu untuk memperoleh rumus perpangkatan sebagai hasil pemahaman terhadap Contoh 1.4 dan Contoh 1.5 di atas. Masih ingatkah kamu, disebut sifat apakah dalam konsep perkalian?
- Buat laporan hasil diskusi kelompokmu.



Contoh 1.4

Buktikan jika $a > 1$ dan $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif maka $a^n > a^m$.

Bukti:

Karena $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $-n$ dan $-m$ adalah bilangan bulat positif dan $-m > -n$.

Karena $a > 1$ maka $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^m} > 1$ (Gunakan sifat $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$).

$$\frac{a^n}{a^m} > 1 \Leftrightarrow a^n > a^m \text{ (terbukti)}$$



Contoh 1.5

Berdasarkan sifat bilangan 7, tentukan bilangan satuan dari 7^{1234} tanpa menghitung tuntas. Perhatikan bilangan satuan dari perpangkatan dari 7 berikut?

Perpangkatan 7	Nilai	Bilangan Satuan
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9
7^7	823543	3
7^8	5764801	1

Coba lanjutkan langkah berikutnya untuk menemukan bilangan satuan 7^{1234} . Cermati sifat satuan pada tabel di atas. Saat periode keberapakah berulang? Selanjutnya manfaatkan sifat-sifat perpangkatan dan perkalian bilangan berpangkat.

5. Pangkat Pecahan

Selanjutnya kita akan analisis sifat perpangkatan bilangan real dengan pangkat pecahan.



Definisi 1.5

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat positif didefinisikan

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m.$$



Definisi 1.6

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{q}$ adalah bilangan pecahan $q \neq 0$, $q \geq 2$. $a^{\frac{p}{q}} = c$, sehingga $c = \sqrt[q]{a^p}$ atau $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Sifat-4

Misalkan a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$. Jika $n, q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}} \right) \left(a^{\frac{p}{n}} \right) = \left(a \right)^{\frac{m+p}{n}}$.

Bukti:

Berdasarkan Sifat-4, jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n adalah bilangan bulat positif,

maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m$. Dengan demikian $\left(a^{\frac{m}{n}} \right) \left(a^{\frac{p}{n}} \right) = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^p$

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}} \right) \left(a^{\frac{p}{n}} \right) &= \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^p \Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}} \right) \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}} \right) \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m+p \text{ faktor}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^{m+p} = \left(a \right)^{\frac{m+p}{n}} \quad (\text{Ingat Definisi 1.5}) \quad (\text{terbukti})$$

Jadi, jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan dengan $n \neq 0$, serta $n, q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}} \right) \left(a^{\frac{p}{q}} \right) = \left(a \right)^{\frac{m+p}{n}}$.

Sifat-5

Jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{q}$ bilangan pecahan $q, n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}} \right) \left(a^{\frac{p}{q}} \right) = a^{\frac{m+p}{n}}$.



Uji Kompetensi 1.1

- Sederhanakanlah operasi bilangan berpangkat berikut.
 - $2^5 \times 2^9 \times 2^{12}$
 - $2^5 \times 3^6 \times 4^6$
 - $\frac{2^5 \times 3^5 \times 4^2}{12^2}$
 - $\frac{(-5)^6 \times 25^2}{125}$
 - $\frac{3^7 \times 7^3 \times 2}{(42)^3}$
- Dengan menggunakan sifat bilangan berpangkat, sederhanakanlah bentuk berikut.
 - $2x^3 \times 7x^4 \times (3x)^2$
 - $\left(\frac{-2p}{q} \right)^3 \times (-q)^4 \times \frac{2}{5} p^2$
 - $y^5 \times (x \times z)^3 \left(\frac{1}{x^2 \times y} \right)$
 - $(a \times b \times c)^4 \times \frac{3}{(b \times c)^3} \times \frac{b^3}{27a^5}$
 - $\frac{-4a^3 \times 2b^5}{\left(\frac{8a}{b} \right)}$
 - $\frac{1}{x^2 y} \times \frac{2x}{3y^2} \times \frac{5}{3x} \times (4y)^2$

$$g. (-a \times b)^3 \times \left(\frac{-b}{2a}\right)^4 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^5$$

$$h. \left(\frac{24a^3 \times b^8}{6a^5 \times b}\right) \times \left(\frac{4b^3 \times a}{2a^3}\right)^2$$

$$i. \left(\frac{36(x \times 2y)^2}{3x \times y^2}\right)^3 \div \left(\frac{12x(3y)^2}{9x^2y}\right)^2$$

$$j. \left(\frac{(-p)^3 \times (-q)^2 \times r^3}{-3(p^2q)^3}\right) \div \left(\frac{2pqr^3}{-12(qr)^2}\right)$$

3. Hitunglah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.

$$a. \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2$$

$$b. (-5)^3 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4 \times \left(\frac{9}{5}\right)^5$$

$$c. \frac{3x^2 \times y^3}{24x} \times (2y)^2; \text{ untuk } x = 2 \text{ dan } y = 3$$

$$d. \frac{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)(-y)^3}{xy^2};$$

untuk $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{3}$

$$e. \frac{3p^2q \times (-3)^4}{(-2p)^2 \times (-3q)^3} \times 4\left(\frac{q}{p}\right)^2;$$

untuk $p = 4$ dan $q = 6$

4. Tentukan hasil dari

$$\frac{(2^{n+2})^2 - 2^2 \times 2^{2n}}{2^n \times 2^{n+2}}$$

5. Misalkan kamu diminta menghitung 7^{64} . Berapa banyak perkalian yang kamu lakukan untuk mendapatkan nilai akhirnya? Bandingkan jawabanmu dengan temanmu. Pemenang di antara kalian adalah yang dapat mencari hasilnya dengan melakukan perkalian sesedikit mungkin. Coba tuliskan prosedur mengalikan yang paling sedikit perkaliannya untuk menghitung 7^{64} . Apakah prosedur tersebut dapat dipergunakan untuk pangkat positif berapapun?

6. Berdasarkan sifat angka 7, tentukan bilangan satuan dari $7^{1234} + 7^{2341} + 7^{3412} + 7^{4123}$ tanpa menghitung tuntas!

7. Tentukan bilangan satuan dari $\left((6)^{26}\right)^{62}$ berdasarkan sifat angka 6, tanpa menghitung tuntas. Selanjutnya berdasarkan sifat angka 2, 3, 4, 5, 8, 9, tentukan juga angka satuan yang diperoleh bilangan-bilangan tersebut yang dipangkatkan.

8. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \dots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.

9. Bagaimana cara termudah untuk mencari $\frac{3^{2008} (10^{2013} + 5^{2012} \cdot 2^{2011})}{5^{2012} (6^{2010} + 3^{2009} \cdot 2^{2008})}$.

10. Hitunglah

$$\frac{1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + 4^{-4} + \dots}{1^{-4} + 3^{-4} + 5^{-4} + 7^{-4} + \dots}$$

11. Sederhanakanlah $\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}}b}$.

12. Tentukan nilai x yang memenuhi

a. $2^x = 8$

b. $4^x = 0,125$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$



Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kecil seringkali dituliskan dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai $a E b$ yang nilainya adalah $a \times 10^b$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai $5,2 E 5$. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen. Misalkan kecepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai $3 E 8$ m/det.

6. Bentuk Akar

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan inversi dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi " $\sqrt{\quad}$ ".

Perhatikan permasalahan berikut.



Masalah-1.4

Seorang ahli ekonomi menemukan bahwa harga (h) dan banyak barang (b) dapat dinyatakan dalam persamaan $h = 3\sqrt[3]{b^2}$. Jika nilai $b = 8$, maka berapa nilai h ?

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} h = 3\sqrt[3]{b^2} &\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{8^2} \\ &\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{64} \\ &\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} \\ &\Leftrightarrow h = 12 \end{aligned}$$

Akar ke- n atau akar pangkat n dari suatu bilangan a dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan a adalah bilangan pokok/basis dan n adalah indeks/eksponen akar. Bentuk akar dan pangkat memiliki kaitan erat. Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal. Sedangkan, bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Bilangan irrasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irrasional, misalnya $\sqrt{2} = 1,414213562373\dots$, $e = 2,718\dots$, $\pi = 3,141592653\dots$ dan sebagainya.



Definisi 1.7

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar jika dan hanya jika hasil $\sqrt[n]{a}$ adalah bilangan irrasional.

bilangan irrasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{\quad}$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irrasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai $\sqrt{25}$ adalah 5 dan nilai $\sqrt{64}$ adalah 8, keduanya bukan bilangan irrasional. Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ adalah bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27} = 3$

7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Berdasarkan Sifat-5, jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$, maka $\left(a^n\right)^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$.

Perhatikan bahwa $\frac{a^n}{a^n} > 1 = p^1 = p$ dan perhatikan bahwa

$\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$.

Perhatikan untuk kasus di bawah ini

$p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = p^1 = p$ dan perhatikan juga bahwa

$\sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{p}$.

Latihan 1.3

Cermatilah dan buktikan apakah berlaku secara umum bahwa $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} = p^2$, sehingga berdasarkan sifat perkalian bilangan berpangkat diperoleh:

$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^3 = p^2 \quad \text{Ingat, } (p^m)^n = p^{m \times n}$$

Jadi, $p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ sebagaimana diberikan pada Definisi-6.

8. Operasi pada Bentuk Akar

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap p , q , dan r adalah bilangan real dan $r \geq 0$ berlaku sifat-sifat berikut.

$$p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p + q)\sqrt[n]{r}$$

$$p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p - q)\sqrt[n]{r}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.6

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut dalam bentuk yang sederhana!

- $$\begin{aligned} 1. \quad 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} &= (3+4)\sqrt{5} \\ &= 7\sqrt{5} \end{aligned}$$
- $$2. \quad \sqrt{5} + \sqrt{3} \text{ (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)}$$
- $$\begin{aligned} 3. \quad 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} &= (2-3)\sqrt[3]{4} \\ &= -\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 4. \quad 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} &= (3-1)\sqrt[3]{x} \\ &= 2\sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Sifat perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.7

- $$1) \quad \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$
- $$2) \quad \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$$
- $$3) \quad 4\sqrt[3]{5} \times 2\sqrt[3]{7} = (4 \times 2)(\sqrt[3]{5 \times 7}) = 8\sqrt[3]{35}$$
- $$4) \quad 3\sqrt[5]{5} \times 5\sqrt[7]{5} = (3 \times 5)(5^{\frac{1}{5}} \times 5^{\frac{1}{7}}) = 15(5^{\frac{12}{35}}) = 15\sqrt[35]{5^{12}}$$
- $$5) \quad \frac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$$
- $$6) \quad \frac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$$

Latihan 1.4

- 1) Buktikan: jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$
- 2) Buktikan: jika a, b, c , dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $a^n \sqrt[n]{c} \times b^n \sqrt[n]{d} = ab^n \sqrt[n]{cd}$
- 3) Buktikan: jika a, b, c , dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0, d \neq 0$, maka $\frac{a^n \sqrt[n]{c}}{b^n \sqrt[n]{d}} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$

c. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Kita tahu bahwa bentuk-bentuk akar seperti $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}, \sqrt{2} - \sqrt{6}$, dst merupakan bilangan irrasional. Jika bentuk akar tersebut menjadi penyebut pada suatu pecahan, maka dikatakan sebagai penyebut irasional.

Penyebut irrasional dapat diubah menjadi bilangan rasional. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan bergantung pada bentuk pecahan itu sendiri. Akan tetapi, prinsip dasarnya sama, yaitu mengalikannya dengan bentuk akar sekawannya. Proses ini dinamakan *merasionalkan penyebut*.

1) Merasionalkan bentuk $\frac{p}{\sqrt{q}}$

Bentuk $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dirasionalkan dengan cara mengalikannya dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$.

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p}{q} \sqrt{q}$$



Diskusi

Menurutmu mengapa penyebut bilangan pecahan berbentuk akar harus dirasionalkan?

Mengapa kita harus mengalikan $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$?

Karena nilai \sqrt{q} selalu positif, maka $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1$. Jadi perkalian $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ tidak akan mengubah nilai $\frac{p}{\sqrt{q}}$ namun menyebabkan penyebut menjadi bilangan rasional.

2) Merasionalkan bentuk $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$

Sebelum kita merasionalkan bentuk-bentuk akar di atas, perlu kita pahami bentuk-bentuk campuran bilangan rasional dan bilangan irrasional.

- Jika bilangan rasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2 + \sqrt{7} = 2 + 2,645751\dots = 4,645751\dots$ (bilangan irrasional).
- Jika bilangan irrasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional atau rasional, Contoh (1) $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 2,236068\dots + 2,645575\dots = 4,881643\dots$ (bilangan irrasional), (2) $2\sqrt{5} + (-2\sqrt{5}) = 0$ (bilangan rasional). Jika dua bilangan irrasional dikurangkan, bagaimana hasilnya?
- Jika bilangan rasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
- Jika bilangan irrasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya dapat bilangan rasional atau bilangan irrasional.

Contoh:

- $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5} \times 5\sqrt{5} = 25$ (25 adalah bilangan rasional)
- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ adalah bilangan irrasional)

- $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar apabila hasil akar a adalah bilangan irrasional.

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

dapat dilakukan dengan memperhatikan sifat perkalian $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Sehingga

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q})(\sqrt{p} - \sqrt{q}) = (\sqrt{p})^2 - (\sqrt{q})^2 = p - q$$

$$(p + \sqrt{q})(p - \sqrt{q}) = p^2 - (\sqrt{q})^2 = p^2 - q$$

Bentuk $(p + \sqrt{q})$ dan bentuk $(p - \sqrt{q})$ saling sekawan, bentuk $(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ dan $(\sqrt{p} - \sqrt{q})$ juga saling sekawan. Jika perkalian bentuk sekawan tersebut dilakukan maka dapat merasionalkan bentuk akar.

Contoh 1.8

Pikirkan cara termudah untuk menghitung jumlah bilangan-bilangan berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = \dots?$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara merasionalkan penyebut tiap suku; yaitu,

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{4} - \sqrt{5}}{\sqrt{4} - \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{\sqrt{99} - \sqrt{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{-1} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{5}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{-1}$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots - \sqrt{99} + \sqrt{100}$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9.$$

Contoh 1.9

Berapakah nilai
$$\sqrt{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}$$

Perhatikan pola bilangan di ruas kanan. Misalkan,

$$P = \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

Dengan mengkuadratkan ruas kiri dan kanan, diperoleh

$$P^2 = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}$$

$$P^2 = \frac{1}{3 + P^2}$$

$$\Leftrightarrow P^2(3 + P^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$$

Dengan mengubah ke bentuk kuadrat sempurna, diperoleh persamaan:

$$\Leftrightarrow \left(P^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(P^2 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \text{ atau } P = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$$

Jadi, nilai dari $\frac{1}{\sqrt{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$

Ingat materi persamaan kuadrat di SMP. Dapatkah kamu selesaikan. $(P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$ dengan rumus *abc* pada persamaan kuadrat?

$\left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$ tidak memenuhi. Dapatkah kamu beri alasannya?

Contoh 1.10

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut.

a. $\frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(3+\sqrt{2})}{9-2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$= \frac{6}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{2}$$

b. $\frac{3}{6+\sqrt{3}} = \frac{3}{6+\sqrt{3}} \times \frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{3(6-\sqrt{3})}{(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{18-3\sqrt{3}}{36-3}$$

$$= \frac{18-3\sqrt{3}}{33}$$

$$= \frac{6}{11} - \frac{\sqrt{3}}{11}$$

c. $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{7-5} \\
 &= \frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{2} \\
 &= 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

3) Menyederhanakan bentuk $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$

Sekarang kita akan menyederhanakan bentuk akar yang mempunyai bentuk khusus; yaitu, bentuk $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$. Perhatikan proses berikut ini!

Diskusikanlah masalah berikut dengan temanmu!

- $(\sqrt{p} + \sqrt{q})(\sqrt{p} + \sqrt{q})$
- $(\sqrt{p} - \sqrt{q})(\sqrt{p} - \sqrt{q})$

Dari hasil kegiatan yang kamu lakukan, kamu akan memperoleh bentuk sederhananya menjadi $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.11

Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

- $$\begin{aligned}
 \sqrt{8+2\sqrt{15}} &= \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5 \times 3}} = \sqrt{5+2\sqrt{5 \times 3}+3} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$
- $$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2$$

2. Jika a, b adalah bilangan asli dan $a \leq b$ sehingga $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{4} + \sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan (a, b) adalah ... (OSN 2005/2006)
3. Nyatakan b dalam a dan c pada $\frac{\sqrt[3]{b} \sqrt{c}}{\sqrt{c} \sqrt[3]{a}} = abc$.
4. Bentuk $\sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}}$ dapat disederhanakan menjadi
5. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000} + \sqrt{1.000.001}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
6. $\sqrt{54 + 14\sqrt{5}} + \sqrt{12 - 2\sqrt{35}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}} =$
7. Jika $(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = (4^x - 3^y)$, maka $x - y = \dots$



Projek

Tidak semua bilangan pecahan desimal tak hingga adalah bilangan irrasional. Sebagai contoh $0,333\dots$ bukanlah bilangan irrasional, karena dapat dinyatakan sebagai pecahan murni $\frac{1}{3}$. Kenyataannya, bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang seperti $0,333\dots$ dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.

- Rancang sebuah prosedur untuk mengkonversi bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang menjadi bilangan pecahan. Beri contoh penerapan prosedur yang kamu rancang.
- Berdasarkan penjelasan di atas π yang bilangan irrasional tidak mungkin sama dengan $\frac{22}{7}$, karena $\frac{22}{7}$ adalah pendekatan untuk nilai π sebenarnya.
 - Berapakah kesalahan $\frac{22}{7}$ terhadap nilai π ?
 - Dengan menggunakan prosedur yang kamu rancang di atas cari pecahan yang lebih mendekati nilai π daripada $\frac{22}{7}$ (kesalahannya lebih kecil).
 - Apakah lebih baik menggunakan angka yang kamu peroleh daripada menggunakan $\frac{22}{7}$?

Buat laporan projek ini dan paparkan di depan kelas.

9. Menemukan Konsep Logaritma

Telinga manusia dapat mendengar suara dengan intensitas yang rentangnya luar biasa. Suara paling keras yang dapat didengar oleh orang yang sehat tanpa merusak gendang telinga memiliki intensitas 1 triliun (1.000.000.000.000) kali lebih kuat dari pada suara paling rendah yang bisa didengar.

Menghitung intensitas bunyi dengan rentang begitu besar tentu sangat tidak nyaman. Namun, dengan logaritma perhitungan ini akan menjadi lebih sederhana. Logaritma merupakan suatu operasi hitung. Alexander Graham Bell (1847–1922) menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi. Skala ini dinamakan *decibel*, dan didefinisikan sebagai $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$, dengan D adalah skala *decibel* bunyi, I adalah intensitas bunyi dengan satuan Watt per meter persegi ($\frac{W}{m^2}$), dan I_0 adalah intensitas bunyi paling minimum yang bisa didengar orang yang sehat, yaitu $1,0 \times 10^{-12}$. Sebagai gambaran, berikut ini adalah tabel intensitas bunyi beberapa objek.

Tabel 1.1 Intensitas bunyi beberapa suara

Intensitas Bunyi ($\frac{W}{m^2}$)	Intensitas Bunyi
$1,0 \times 10^{-12}$	Ambang batas bawah pendengaran
$5,2 \times 10^{-10}$	Suara bisik-bisik
$3,2 \times 10^{-6}$	Percakapan normal
$8,5 \times 10^{-4}$	Lalu lintas padat
$8,3 \times 10^2$	Pesawat jet lepas landas

Banyak masalah kehidupan yang penyelesaiannya melibatkan berbagai aturan dan sifat logaritma. Cermatilah masalah berikut.



Masalah-1.5

Yusuf adalah seorang pelajar kelas X di kota Kupang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp1.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp1.464.100,00.

Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Buat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Selanjutnya temukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang.

Diketahui:

Modal awal (M_0) = 1.000.000 dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya:

Berapa tahun (t) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (M_t) = 1.464.100.-

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahun pada tabel sebagai berikut.

Tabel 1.2 Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun t

Akhir Tahun	Bunga uang (10% × Total Uang)	Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat t
0	0	Rp1.000.000,00	1.000.000 (1+0,1) ⁰
1	Rp100.000,00	Rp1.100.000,00	1.000.000 (1+0,1) ¹
2	Rp110.000,00	Rp1.210.000,00	1.000.000 (1+0,1) ²
3	Rp121.000,00	Rp1.331.000,00	1.000.000 (1+0,1) ³
4	Rp133.100,00	Rp1.464.100,00	1.000.000 (1+0,1) ⁴

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar uangnya menjadi Rp1.464.100,00. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membahas tentang pemangkatan suatu bilangan. Kita tahu bahwa 2^3 hasilnya adalah 8 yang dapat ditulis $2^3 = 8$. Sehingga bila ada persamaan $2^x = 8$, maka nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 3$.

Perhatikan Tabel-1.2 di atas, kita peroleh $1.464.100 = 1.000.000 (1+0,1)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $1.464.100 = 1.000.000 (1 + 0,1)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,1)$, $b = 1,464100$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$?

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan invers dari eksponen, yaitu logaritma. Logaritma, dituliskan sebagai “log”, didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 1.8

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$ maka ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $a^c = b$.

dimana: a disebut basis ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)

b disebut numerus ($b > 0$)

c disebut hasil logaritma



Diskusi

Mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Diskusikan dengan temanmu atau guru. Demikian juga dengan $b > 0$.

Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan bentuk-bentuk berikut.

- $2^x = 5 \Leftrightarrow x = {}^2\log 5$ (notasi \Leftrightarrow dibaca jika dan hanya jika)
- $3^y = 8 \Leftrightarrow y = {}^3\log 8$
- $5^z = 3 \Leftrightarrow z = {}^5\log 3$

Catatan:

- ◆ Jika logaritma dengan basis e (yaitu $e \approx 2,718\dots$, e adalah bilangan *Euler*), maka ${}^e\log b$ ditulis $\ln b$.
- ◆ Bilangan pokok (basis) 10 tidak ditulis, sehingga ${}^{10}\log a = \log a$.



Masalah-1.6

Di tahun 2013 jumlah penduduk Negara X adalah 100 juta orang. Bila pertambahan penduduk 1% per tahun, berapa jumlah penduduk negara itu pada akhir tahun 2017 dan tahun 2038? Pada tahun berapa penduduk negara itu menjadi dua kali lipat?

Diketahui:

Jumlah penduduk Negara X pada tahun 2013 adalah 100 juta jiwa.

Persentase pertambahan penduduk per tahun adalah 1%

Ditanya:

- Jumlah penduduk pada tahun 2017 dan tahun 2038
- Pada tahun berapa, jumlah penduduk menjadi dua kali lipat.

Penyelesaian

Jumlah penduduk di awal (P_0) = 100 juta

Misalkan: P_t adalah jumlah penduduk pada tahun t

r adalah persentase pertambahan penduduk.

Tabel 1.3 Perhitungan jumlah penduduk Negara X untuk setiap tahun

Akhir Tahun	Pertambahan penduduk (1% × total penduduk) (juta)	Total = Jumlah Penduduk awal + Pertambahan (juta)	Pola Total Penduduk pada saat t
2013	0	100	$100 (1+0,01)^0$
2014	1	101	$100 (1+0,01)^1$
2015	1,01	102,01	$100 (1+0,01)^2$
2016	1,0201	103,0301	$100 (1+0,01)^3$
2017	1,030301	104,060401	$100 (1+0,01)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa total penduduk pada akhir tahun 2017 adalah 104.060.401. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

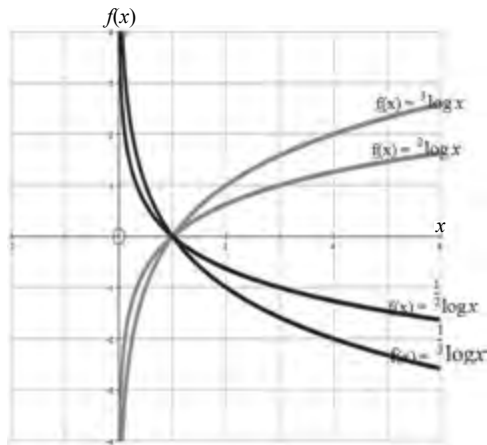
Perhatikan Tabel-1.3 di atas, kita peroleh $104.060.401 = 100 (1+0,01)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $104.060.401 = 100 (1+0,01)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,01)$, $b = 104.060.401$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$? Selanjutnya bagaimana menentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2038 dan tahun berapa jumlah penduduk Negara X menjadi duakali lipat.



Diskusi

- Misalkan P_0 adalah jumlah penduduk pada saat $t = 0$, dan P_t adalah jumlah penduduk pada akhir tahun t , dan diketahui nilai $e \approx 2,718....$ Berdiskusilah dengan teman dan guru, bagaimana menemukan hubungan P_t dengan P_0 sehingga $P_t = P_0 (e^{rt})$.
- Apakah kamu mengerti maknanya? Jika tidak, bertanya pada guru. Misalnya ketika $t = 0$, maka $P_0 = 100$ juta. Artinya jumlah penduduk mula-mula adalah 100 juta orang.

Selanjutnya cermati grafik fungsi $y = f(x) = {}^2\log x$, $f(x) = -{}^2\log x$, $f(x) = {}^3\log x$ dan $f(x) = -{}^3\log x$ yang disajikan berikut.



Gambar 1.2 Grafik Fungsi Logaritma



Diskusi

Berdasarkan grafik di atas dan definisi tentang logaritma, diskusikan dengan temanmu untuk mencari sedikitnya 5 sifat dari fungsi logaritma. Sajikan hasil yang kamu peroleh di depan kelas.

Perhatikan grafik fungsi di atas. Isilah tabel berikut.

Tabel 1.4 Perhitungan Nilai Fungsi Logaritma

	x								
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	8	9
$f(x) = {}^2\log x$				0					
$f(x) = \frac{1}{2}\log x$				0					
$f(x) = {}^3\log x$				0					
$f(x) = \frac{1}{3}\log x$				0					

Mari kita definisikan fungsi logaritma.



Definisi 1.9

Fungsi Logaritma adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh $y = f(x) = {}^a\log x$ dengan a bilangan real, $a > 0$, $a \neq 1$ serta $x > 0$.
 x adalah variabel (peubah bebas) dan a adalah bilangan pokok atau *basis*.



Contoh 1.12

1. Tulislah bentuk logaritma dari:
 - a. $2^5 = 32$ maka ${}^2\log 32 = 5$
 - b. $4^3 = 64$ maka ${}^4\log 64 = 3$
 - c. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ maka ${}^2\log \frac{1}{4} = -2$
2. Tulislah bentuk pangkat dari:
 - a. ${}^{11}\log 121 = 2$ maka $11^2 = 121$
 - b. ${}^3\log 81 = 4$ maka $3^4 = 81$
 - c. $\log 1000 = 3$ maka $10^3 = 1000$
3. Hitunglah nilai logaritma berikut.
 - a. ${}^2\log 2 = 1$ karena $2^1 = 2$
 - b. ${}^2\log 1 = 0$ karena $2^0 = 1$
 - c. ${}^2\log 128 = 7$ karena $2^7 = 128$

10. Sifat-sifat Logaritma

Dari Definisi 1.9, logaritma merupakan inversi dari perpangkatan, oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu:

Sifat-6. Sifat Dasar Logaritma

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka

1. ${}^a\log a = 0$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = n$

Sifat-sifat tersebut dapat diturunkan langsung dari definisi logaritma.



Contoh 1.13

- ${}^a \log a = x \Leftrightarrow a^x = a$ sehingga $x = 1$ atau ${}^a \log a = 1$
- ${}^a \log 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1$. Karena $a^0 = 1$, maka $y = 0$
- ${}^a \log a^n = z \Leftrightarrow a^z = a^n$ sehingga $z = n$ serta ${}^a \log a^n = n$

BEBERAPA SIFAT OPERASI LOGARITMA

Sifat-7

Untuk a , b , dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku

$${}^a \log(b \times c) = {}^a \log b + {}^a \log c$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

$${}^a \log b = x \Leftrightarrow b = a^x$$

$${}^a \log c = y \Leftrightarrow c = a^y$$

Dengan mengalikan nilai b dengan c , maka:

$$b \times c = a^x \times a^y \Leftrightarrow b \times c = a^{x+y}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log(b \times c) = x + y$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log(b \times c) = {}^a \log b + {}^a \log c \quad (\text{terbukti})$$

Substitusi nilai x dan y

- Simbol \Leftrightarrow dibaca jika dan hanya jika
- Apakah kamu mengerti maknanya? Jika tidak bertanya kepada guru.

Sifat-8

Untuk a , b , dan c bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku

$${}^a \log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a \log b - {}^a \log c$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6, diperoleh:

$${}^a \log b = x \Leftrightarrow b = a^x$$

$${}^a \log c = y \Leftrightarrow c = a^y$$

Dengan membagikan nilai b dengan c , maka diperoleh

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a \log a^{x-y}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log \left(\frac{b}{c} \right) = x - y \quad \text{Substitusi nilai } x \text{ dan } y$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log \left(\frac{b}{c} \right) = {}^a \log b - {}^a \log c \quad (\text{terbukti})$$

Sifat-9

Untuk a, b , dan n bilangan real, $a > 0, b > 0, a \neq 1$, berlaku

$${}^a \log b^n = n {}^a \log b$$

Bukti:

$${}^a \log b^n = {}^a \log \left(\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{n \text{ faktor}} \right) \quad \text{ingat, } a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log b^n = \underbrace{{}^a \log b + {}^a \log b + \dots + {}^a \log b}_{n \text{ faktor}} \quad \text{ingat, Sifat-8}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log b^n = n {}^a \log b \quad (\text{terbukti})$$

Sifat-10

Untuk a, b , dan c bilangan real positif, $a \neq 1, b \neq 1$, dan $c \neq 1$, berlaku

$${}^a \log b = \frac{{}^c \log b}{{}^c \log a} = \frac{1}{{}^b \log a}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.8, diperoleh:

$${}^a \log b = x \Leftrightarrow b = a^x$$

Terdapat bilangan pokok c sedemikian sehingga:

$${}^c \log b = {}^c \log a^x \Leftrightarrow {}^c \log b = x {}^c \log a \quad \text{ingat, Sifat-9}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{{}^c \log b}{{}^c \log a} \quad \text{substitusi nilai } x$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log b = \frac{{}^c \log b}{{}^c \log a} \quad (\text{terbukti})$$

Karena c adalah bilangan sembarang dengan ketentuan di atas dapat dipenuhi $c = b$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow {}^a \log b &= \frac{{}^b \log b}{{}^b \log a} && \text{ingat, Sifat pokok 2} \\ \Leftrightarrow &= \frac{1}{{}^b \log a} && \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Sifat-11

Untuk a, b , dan c bilangan real positif dengan $a \neq 1$ dan $c \neq 1$, berlaku
 ${}^a \log b \times {}^b \log c = {}^a \log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

$$\begin{aligned} {}^a \log b = x &\Leftrightarrow b = a^x \\ {}^b \log c = y &\Leftrightarrow c = b^y \\ {}^a \log b \times {}^b \log c &= {}^a \log a^x \times {}^b \log b^y \\ \Leftrightarrow {}^a \log b \times {}^b \log c &= {}^a \log b \times {}^b \log b^y && \text{ingat, } c = b^y \\ \Leftrightarrow {}^a \log b \times {}^b \log c &= y {}^a \log b \times {}^b \log b && \text{ingat, Sifat pokok 2} \\ \Leftrightarrow {}^a \log b \times {}^b \log c &= y {}^a \log b && \text{ingat, Sifat 6} \\ \Leftrightarrow {}^a \log b \times {}^b \log c &= {}^a \log b^y && \text{ingat, } c = b^y \\ \Leftrightarrow {}^a \log b \times {}^b \log c &= {}^a \log c && \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Sifat-12

Untuk a dan b bilangan real positif dengan $a \neq 1$, berlaku

$${}^a \log b^n = \frac{n}{m} ({}^a \log b), \text{ dengan } m, n \text{ bilangan bulat dan } m \neq 0.$$

Bukti: (Silahkan coba sendiri)

Sifat-13

Untuk a dan b bilangan real positif $a \neq 1$, berlaku $a^{{}^a \log b} = b$

Bukti: (coba sendiri)

Logaritma saling *invers* dengan eksponen. Misalkan ${}^a \log b = c$. Kita substitusikan ${}^a \log b = c$ ke $a^c = (a)^{{}^a \log b}$, sehingga diperoleh $a^c = b$

Untuk mendalami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14

Mari kita tinjau kembali Masalah-1.5. Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep logaritma. Cermatilah kembali Tabel 1.2. Kita dapat menyatakan hubungan total jumlah uang untuk t tahun sebagai berikut:

$$M_t = M_0 (1+i)^t$$

dimana M_t : total jumlah uang diakhir tahun t

t : periode waktu

i : bunga uang

Dengan menggunakan notasi di atas, maka soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Diketahui : $M_0 = 1.000.000$, $M_t = 1.464.100$, $i = 0,1$

Ditanya : t

Penyelesaian

$$1.464.100 = 1.000.000 (1+0,1)^t$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log [1.000.000 (1,1)^t]$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log 1.000.000 + \log (1,1)^t$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 - \log 1.000.000 = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1.464.100}{1.000.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{14.641}{10.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{11}{10} \right)^4 = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow 4 \log (1,1) = t \log 1,1$$
$$\Rightarrow t = 4$$

Jadi, Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mendapatkan uang sebesar Rp1.464.100,00.

Contoh 1.15

Misal $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $\log^2 a + \log a = 6$?

Penyelesaian

Misal $P = \log a$

$$\begin{aligned}\log^2 a + \log a = 6 &\Leftrightarrow (\log a)^2 + (\log a) = 6 \\ &\Leftrightarrow P^2 + P - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (P + 3)(P - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow P = -3 \text{ atau } P = 2 \\ &\Leftrightarrow \log a = -3 \text{ atau } \log a = 2 \\ &\Leftrightarrow a = 10^{-3} \text{ atau } a = 10^2\end{aligned}$$

Jadi, nilai a yang memenuhi persamaan di atas adalah $a = 0,001$ atau $a = 100$.



Contoh 1.16

Nyatakan b dalam a supaya berlaku ${}^a\log b - 2^b\log a = 1$!

Penyelesaian

$${}^a\log b - 2^b\log a = 1$$

$$\text{Ingat, } {}^b\log a = \frac{1}{{}^a\log b}$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b - \frac{2}{{}^a\log b} - 1 = 0$$

$$\text{Misalkan: } P = {}^a\log b$$

$$\Leftrightarrow P - \frac{2}{P} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - P - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (P + 1)(P - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow P = -1 \text{ atau } P = 2$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = -1 \text{ atau } {}^a\log b = 2$$

Sekarang akan kita nyatakan b dalam a , yaitu,

$${}^a\log b = -1 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^{-1} \text{ atau } {}^a\log b = 2 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^2$$

$$\Leftrightarrow b = a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow b = a^2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a}$$

Jadi, $b = \frac{1}{a}$ atau $b = a^2$.



Uji Kompetensi 1.3

- Pada awal tahun, Rony menabung uang di bank sebesar Rp125.000,00. Ia menyimpan uang tersebut selama 8 tahun. Berapa jumlah uang Rony pada akhir tahun ke delapan jika bank memberi suku bunga majemuk 6% setahun?
- Pak Thomas menabung Rp2.000.000,00 selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, berapakah besar bunga yang diterima Pak Thomas?
- Tentukan skala decibel suara berikut.
 - Percakapan normal yang memiliki intensitas $3,2 \times 10^{-6}$ Watt per meter kuadrat.
 - Pesawat jet yang baru lepas landas yang memiliki intensitas $8,3 \times 10^2$ Watt per meter kuadrat.
- Gemuruh suara Air terjun Niagara memiliki skala decibel 90. Tentukan intensitas bunyi dari air terjun tersebut. Apakah intensitas tersebut masih aman untuk telinga manusia?
- Tulislah bentuk logaritma dari:
 - $5^3 = 125$
 - $10^2 = 100$
 - $4^3 = 64$
 - $6^1 = 6$
- Tulislah bentuk pangkat dari:
 - $\log 0,01 = -2$
 - ${}^{0,5}\log 0,0625 = 4$
 - ${}^2\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$
 - ${}^3\log \frac{1}{9} = -2$
- Hitunglah nilai dari:
 - $\log 10^4$
 - ${}^5\log 125$
 - ${}^3\log \frac{1}{27}$
 - ${}^2\log 0,25$
 - ${}^4\log 4^{10}$
 - ${}^5\log 1$
- Diketahui $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ dan $\log 7 = 0,8451$ tentukan:
 - $\log 18$
 - $\log 21$
 - $\log 10,5$
 - $\log \frac{1}{7}$
- Sederhanakan
 - $\frac{2}{3} \times {}^2\log 64 - \frac{1}{2} \times {}^2\log 16$
 - ${}^a\log 2x + 3({}^a\log x - {}^a\log y)$
 - ${}^a\log \frac{a}{\sqrt{x}} - {}^a\log \sqrt{ax}$
 - $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \frac{1}{2} \log ab$
- Jika ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^3\log 5 = b$, nyatakan bentuk berikut dalam a dan b !
 - ${}^2\log 15$
 - ${}^4\log 75$

- c. $^{25}\log 36$
 - d. $^2\log 5$
 - e. $^{30}\log 150$
 - f. $^{100}\log 50$
11. Jika $b = a^4$, a dan b bilangan real positif, tentukan nilai $^a\log b - ^b\log a!$
 12. Jika $^a\log b = 4$, $^c\log b = 4$ dan a, b, c bilangan positif, $a, c \neq 1$, tentukan nilai $\left[^a\log(bc)^4 \right]^{\frac{1}{2}}!$
 13. Buktikan $\log 1 = 0$ dan $\log 10 = 1!$
 14. Buktikan bahwa untuk $a > b > 0$, $^a\log b < 0$ dan sebaliknya untuk $0 < a < b$, $^a\log b > 0!$
 15. $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $2 \times \log^2 a + \log a = 6?$
 16. Nyatakan p dalam q supaya berlaku $^p\log q - 6 ^a\log p = 1!$
 17. $^2\log^2 a$ adalah notasi untuk $(^2\log a)^2$. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka berapakah nilai a yang memenuhi $^2\log^2(a^2 - 6a) + ^2\log(a^2 - 6a)^2 = 8$.
 18. Untuk $a > 0, a \neq 1$, nyatakan b dalam a yang memenuhi persamaan $^a\log^2(b^a + a) - ^a\log(b^a + a)^3 + 2 = 0$

SOAL TANTANGAN

19. Jika $^4\log a = p$ dan $^8\log b = q$ maka tentukanlah

$$\sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{\dots}}}}}}}$$

dalam p dan q .



Projek

Skala logaritma dipergunakan untuk banyak keperluan selain menyatakan intensitas bunyi. Cari informasi tentang besaran lain yang menggunakan skala logaritma. Untuk membedakan analisis menggunakan logaritma bahkan digambarkan grafik dalam skala logaritma. Cari informasi ada berapa macam skala logaritma biasa dipergunakan dan beri contoh penelitian agar skala logaritma tersebut dipergunakan. Buat laporan hasil pengamatan dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat eksponen dan logaritma di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Konsep eksponen dan logaritma dapat ditemukan kembali dari berbagai pemecahan masalah nyata di sekitar kehidupan kita.

2. Operasi eksponen adalah perluasan dari operasi perpangkatan yang sudah dipelajari di Sekolah Dasar dan SMP. Operasi perpangkatan pasti merupakan eksponen, tetapi operasi eksponen belum tentu perpangkatan. Perbedaannya terletak pada semesta pembicaraannya. Semesta pembicaraan pada operasi perpangkatan adalah bilangan, tetapi semesta pembicaraan pada eksponen tergantung variabel sebagai eksponen dari basisnya. Misalnya $p^x = q$, x sebagai eksponen dari p , dimana x dan p belum tentu bilangan, tetapi $2^3 = 8$, 3 adalah sebuah bilangan pangkat dari 2.
3. Perpangkatan dan penarikan akar adalah dua operasi yang saling berkebalikan. Artinya jika suatu bilangan dipangkatkan dan hasilnya diakarkan dengan pangkat akar yang sama dengan pangkat bilangan sebelumnya, maka hasilnya adalah bilangan semula. Misalnya $2^3 = 8$ maka $\sqrt[3]{8} = 2$
4. Sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk menurunkan sifat-sifat penarikan akar.
5. Eksponen dan logaritma adalah dua operasi yang saling berbalikan. Artinya jika suatu basis a dieksponekan dengan c dan hasilnya adalah b , maka logaritma dari b dengan basis yang sama, yaitu a , hasilnya adalah c sebagai eksponen dari a . Dapat ditulis misal $a, b, c \in R$, $0 < a < 1$, $a \neq 1$ dan $b > 0$, jika $a^c = b$ maka ${}^a\log b = c$.
6. Jika grafik fungsi eksponen dicerminkan terhadap sumbu $y = x$, maka diperoleh grafik fungsi logaritma.
7. Penguasaan berbagai konsep dan sifat-sifat eksponen dan logaritma adalah prasyarat untuk mempelajari fungsi eksponen dan fungsi logaritma sebab fungsi eksponen melibatkan bilangan eksponen dan fungsi logaritma melibatkan logaritma. Secara mendalam, berbagai sifat-sifat dari fungsi eksponen dan logaritma serta penerapannya akan dibahas dipokok bahasan peminatan.

Pada Bahasan 2 (Bab 2), kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier yang melibatkan variabel berpangkat satu. Sama halnya dengan penemuan kembali konsep eksponen dan logaritma melalui pemecahan masalah nyata, akan kita temukan konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linier dari berbagai situasi nyata kehidupan disekitar kita. Penguasaan kamu pada materi eksponen dan logaritma akan berguna untuk mempelajari materi pada bab berikutnya. Perlu kami tekankan bahwa mempelajari materi matematika mulai bahasan 1 sampai 12, harus dipelajari secara terurut, jangan melompat-lompat, sebab sangat dimungkinkan penguasaan materi pada bahasan berikutnya didasari penguasaan materi pada bahasan sebelumnya.

Bab 2

Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

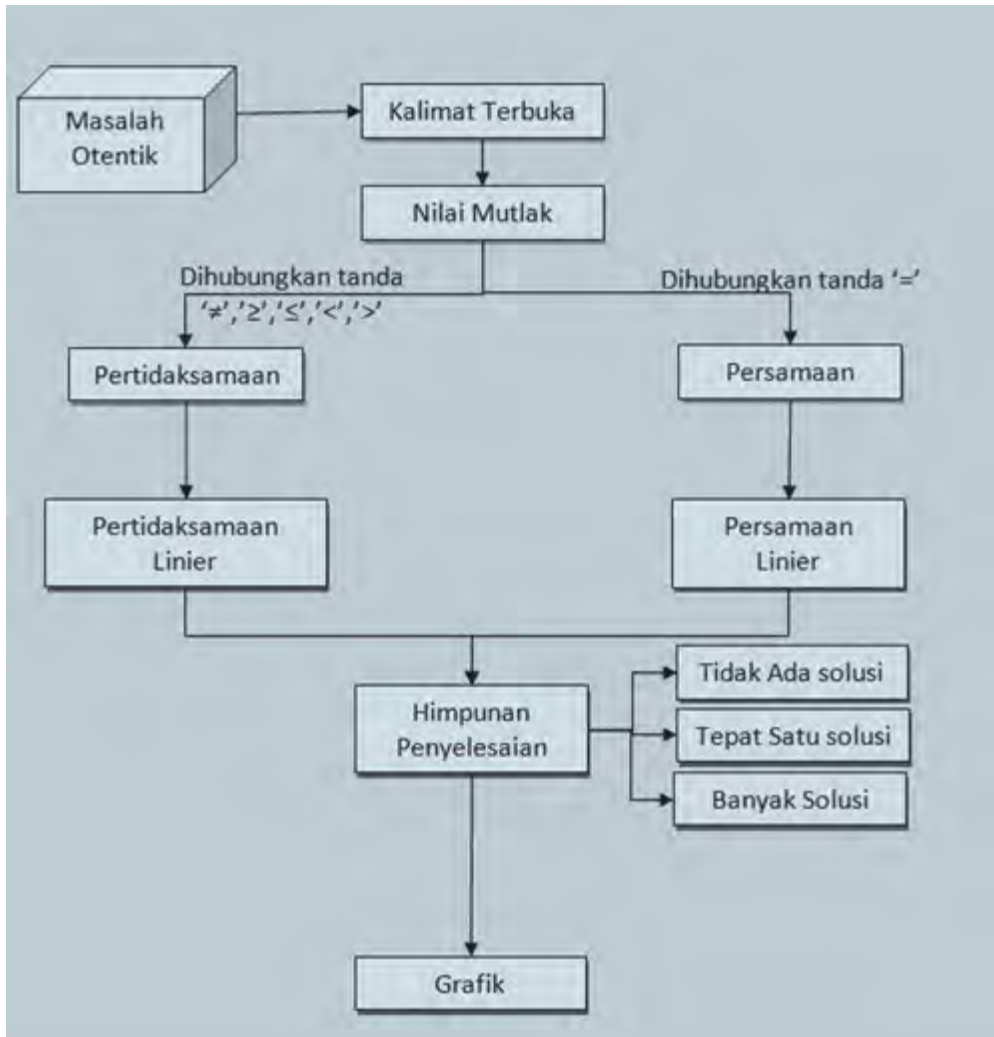
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami dan menganalisis konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan serta menerapkannya dalam penyelesaian masalah nyata; 3. menerapkan konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linear dalam memecahkan masalah nyata.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: <ul style="list-style-type: none">• mampu berpikir kreatif;• mampu menghadapi permasalahan pada kasus linear dalam kehidupan sehari-hari;• mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan;• mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep;• mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan;• mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari;• siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- Orde linear
- Lebih dari
- Kurang dari
- Nilai mutlak

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada saat ini, kita akan mempelajari beberapa ilustrasi dan kasus untuk memahami dan menemukan konsep nilai mutlak (*absolut*).

1. Memahami dan Menemukan Konsep Nilai Mutlak

Ilustrasi:



Gambar 2.1 Anak Pramuka

Kegiatan pramuka adalah salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sebuah sekolah. Sebuah grup pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan pasukan: “Maju 4 langkah, jalan!”, hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah ke depan. Jika perintah pimpinan pasukan: “Mundur 3 langkah, jalan!”, hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak melawan arah sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. “Maju 4 langkah”, berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan “mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya. Lebih jelasnya, mari bersama-sama mempelajari kasus-kasus di bawah ini.



Masalah-2.1

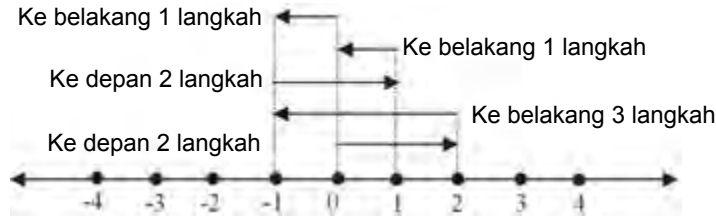
Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya 1 langkah ke belakang.

Permasalahan:

- Dapatkah kamu membuat sketsa lompatan anak tersebut?
- Tentukanlah berapa langkah posisi akhir anak tersebut dari posisi semula!
- Tentukanlah berapa langkah yang dijalani anak tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Kita definisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif, dengan demikian lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif. Perhatikan sketsa berikut:



Gambar 2.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan, langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif), anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif) dari posisi akhir langkah pertama, demikianlah seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah ke 5.

Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = -1$). Banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak, karena kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya. Banyak langkah selalu dinyatakan dengan bilangan bulat positif walaupun arahnya ke arah sumbu x negatif. Banyak langkah dapat dinyatakan dengan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat. Misalnya mundur 3 langkah dinyatakan dengan harga mutlak negatif 3 (-3). Sehingga banyak langkah anak tersebut adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (9 langkah).

Perhatikan Tabel 2.1 berikut.

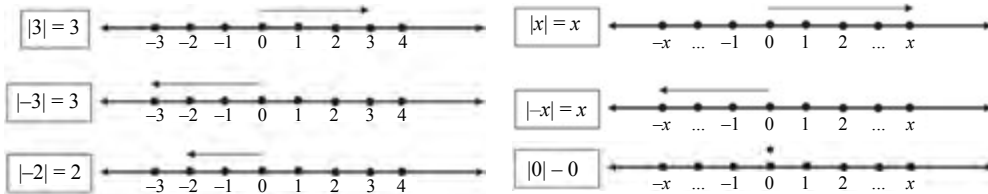
Tabel 2.1 Nilai Mutlak

Nilai Non Negatif	Nilai Mutlak	Nilai Negatif	Nilai Mutlak
0	0	-2	2
2	2	-3	3
3	3	-4	4
5	5	-5	5

Dari ilustrasi dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik sebuah kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak tersebut? Jika x adalah variabel pengganti semua bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak x tersebut?

Perhatikan bahwa x elemen himpunan bilangan real, kita tuliskan dengan $x \in R$.

Dari contoh pada tabel tersebut, kita melihat bahwa nilai mutlak akan bernilai positif atau nol. *Nilai mutlak adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real.* Perhatikan garis bilangan berikut. Kita lakukan beberapa percobaan perpindahan posisi sebagai berikut.



Gambar 2.3 Selang Nilai Mutlak

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas, dapat diperoleh definisi nilai mutlak berikut.



Definisi 2.1

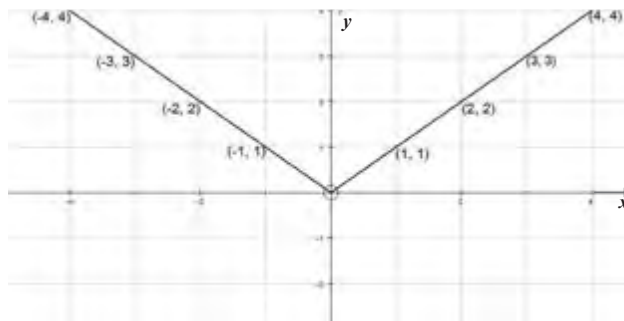
Misalkan x bilangan real, didefinisikan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Berikutnya, kita akan mencoba menggambar grafik $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$. Perhatikan beberapa titik yang mewakili grafik fungsi di atas.

Tabel 2.2 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x|$

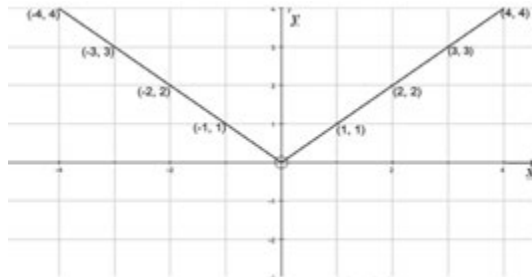
x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y=f(x)$	4	2	1	0	1	2	4
(x,y)	(-4,4)	(-2,2)	(-1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(4,4)

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel, disajikan dalam koordinat kartesius



Gambar 2.4: Grafik $y = f(x) = |x|$

sebagai berikut.



Gambar 2.4: Grafik $y = f(x) = |x|$

Berdasarkan definisi dan gambar grafik di atas dapat kita simpulkan bahwa harga $|x|$ pada dasarnya menyatakan besar simpangan dari titik $x = 0$.

Contoh 2.1

Gambarkan grafik $f(x) = |x - 2|$ yang menyatakan besar simpangan pada titik $x = 2$. Sekarang, mari kita buat grafik $f(x) = |x - 2|$, dengan langkah-langkah berikut.

Langkah 1.

Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan titik-titik yang mewakili grafik tersebut.

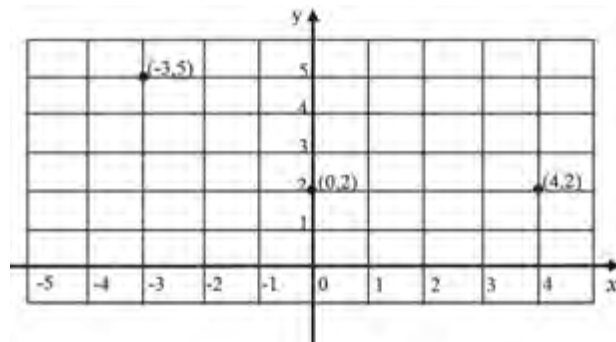
Tabel 2.3 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x - 2|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	2	2
(x, y)	$(-3, 5)$	$(0, 2)$	$(4, 2)$

Lengkapilah tabel di atas!

Langkah 2.

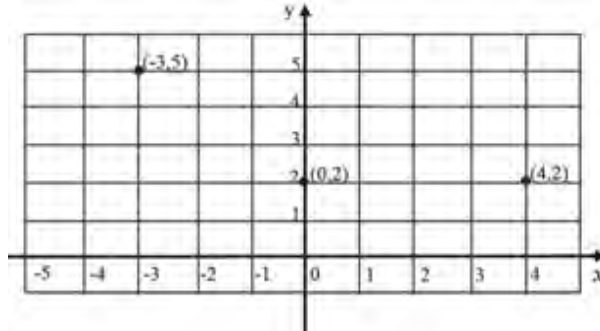
Letakkanlah titik-titik yang kamu peroleh pada Tabel 2.3 pada koordinat kartesius.



Gambar 2.5 Titik Grafik $f(x) = |x - 2|$

Langkah 3.

Hubungkanlah titik-titik yang sudah kamu letakkan di koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai x .



Gambar 2.6 Titik Grafik $f(x) = |x-2|$

Latihan 2.1

Perhatikan grafik $f(x) = |x - 2|$

Lihatlah penyimpangan grafik terhadap sumbu x . Dapatkah kamu beri kesimpulan?

Bagaimana dengan penyimpangan pada grafik $f(x) = |x - p|$ terhadap sumbu x , untuk p bilangan real.

Selanjutnya, mari kita amati hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Hubungan $|x|$ dan $\sqrt{x^2}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$ x $	3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0	1	2	3

Dapatkah kamu mengambil kesimpulan hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ berdasarkan tabel di atas?

Latihan 2.2

Dari definisi nilai mutlak yang kita berikan, dapatkah anda berikan pendefinisian berikut.

$$|ax + b| = \begin{cases} \dots & \text{jika } \dots \geq \dots \\ \dots & \text{jika } \dots < \dots \end{cases}$$

Cobalah mendiskusikannya dengan temanmu!

2. Persamaan Linier

Masalah-2.2

Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia membelanjakan uangnya Rp4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dia belanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari Selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanjaan hari Senin. Sekarang dia masih memiliki uang sisa belanjaan sebanyak Rp1.000,00.

Dapatkah kamu membuat model dari kasus permasalahan tersebut? Buatlah model tersebut, apakah kamu dapat menentukan uang Andi sebelum dibelanjakan?

Diketahui:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2} \times$ jumlah uangnya.

Belanja hari Senin = Rp4.000,00 lebih sedikit dari belanja hari Minggu.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3} \times$ belanja hari Senin.

Ditanya:

- Buatlah model matematika dari permasalahan di atas.
- Tentukan berapa uang Andi sebelum dibelanjakan.

Alternatif Penyelesaian

Marilah kita bersama-sama menyelesaikan permasalahan ini.

Misal banyak uang Andi = x

Dari yang diketahui diperoleh

$$\text{Belanja hari Minggu} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{Belanja hari Senin} = \frac{1}{2}x - 4000$$

$$\text{Belanja hari Selasa} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right)$$

Kita buat sebuah persamaan dari kasus ini, yaitu:

Uang Andi = jumlah uang yang dibelanjakan + sisa uang sehingga penyelesaian permasalahan ini, adalah:

$$\begin{aligned}x &= \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000 \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000 \quad (\text{kalikan kedua ruas dengan } 6),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6x &= 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000 \\ &= 7x - 26.000\end{aligned}$$

$$x = 26.000$$

Dengan demikian uang Andi mula-mula adalah Rp26.000,00.



Masalah-2.3

Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenek diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tanggal lahirnya. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi.

Dapatkah kamu membuat persamaan linear dari persoalan di atas? Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

$$\text{Umur kakek} - \text{umur nenek} = 3$$

Misalkan: Umur kakek = K Umur nenek = N
 Tahun lahir kakek = TK Tahun lahir nenek = TN
 $K - N = 3$.

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:

$N = (20 - 11) + (2013 - 1945)$ atau $N = 77$ tahun sehingga dengan $K - N = 3$ membuat $K = 80$ tahun.

Selanjutnya kita mendapatkan konsep mencari dugaan tahun lahir mereka dengan:

$$\text{Tahun lahir} + \text{Usia} = \text{Tahun sekarang}$$

sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:

$$TN + 77 = 2013 \text{ atau } TN = 1936$$

$$TK + 80 = 2013 \text{ atau } TK = 1933$$

Dengan demikian, kemungkinan tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.



Masalah-2.4

Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah $\frac{2}{3}$ kali umur ayah pada c tahun yang akan datang, (c adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari $\frac{1}{5}$ umurnya pada 7 tahun yang lalu.

Apakah kamu dapat menentukan umur ayah saat ini? Tentukanlah nilai c pada kasus tersebut!

Alternatif Penyelesaian

- Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.
- Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan

Umur ayah 4 tahun yang lalu $\frac{2}{3}$ kali umur ayah pada c tahun yang akan datang,

$$\text{atau } x - 4 = \frac{2}{3}(x + c)$$

Umur ayah sekarang 27 tahun lebihnya dari $\frac{1}{5}$ kali umurnya pada 7 tahun yang lalu.

$$\text{Artinya: } x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27$$

- Model yang telah diperoleh, kita selesaikan sebagai berikut:

$$x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2c + 12 \text{ (notasi } \Leftrightarrow \text{ dibaca jika dan hanya jika)}$$

$$x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 32$$

Kita substitusi $x = 32$ ke $x = 2c + 12$
Diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$
Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.



Diskusi

Coba anda teliti kasus berikut! Dapatkah kamu menjawab dan memberi komentar, apakah kasus berikut logis?
Umur Ayah 5 tahun yang lalu adalah $\frac{2}{3}$ kali umurnya pada c tahun yang akan datang. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari $\frac{1}{2}$ kali umurnya 7 tahun yang lalu.

Ketiga permasalahan di atas adalah sebuah pemahaman konsep dari bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Secara induktif, bentuk umum dari persamaan linear satu variabel dan dua variabel, sebagai berikut.



Definisi 2.2

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, dimana
 x : variabel
 a : koefisien dari x
 b : konstanta



Definisi 2.3

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + by + c = 0$ dengan $a, b \in R$, a dan b tidak keduanya nol, dimana
 x, y : variabel
 a : koefisien dari x
 b : koefisien dari y
 c : konstanta persamaan



Contoh 2.2

1. Diberikan persamaan linear $x - 4y = 12$, untuk setiap $x, y \in R$. Gambarkanlah grafiknya!

Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ dan kita buat pada tabel berikut.

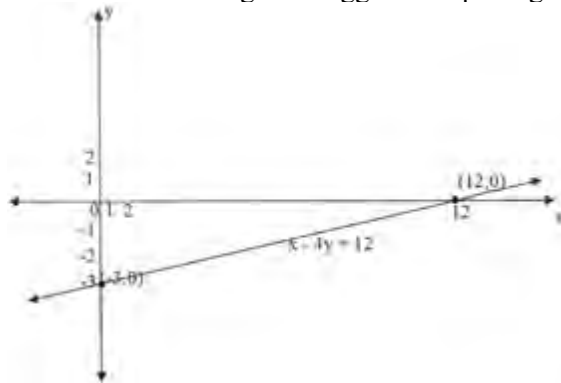
Tabel 2.5 Pasangan titik (x,y) untuk grafik $x - 4y = 12$

x	0	12	13	16
y	-3	0	$\frac{1}{4}$	1
(x,y)	$(0,-3)$	$(12,0)$	$(13,\frac{1}{4})$	$(16,1)$

Dari data Tabel 2.5 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$$HP = \{(0,-3), (12,0), (13,\frac{1}{4}), (16,1), \dots\}.$$

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian persamaan, khususnya diketahui bahwa grafik $x - 4y = 12$ ini memotong sumbu x pada titik $(12, 0)$ serta memotong sumbu y pada titik $(0, -3)$, dapat kita gambarkan grafik $x - 4y = 12$ pada sumbu koordinat dengan menggunakan pasangan (x, y) tersebut.



Gambar 2.7 Grafik $x - 4y = 12$



Contoh 2.3

Diberikan persamaan linear $y = 3x - 4$, untuk setiap $x \in R$. Gambarlah grafik persamaan linear tersebut!

Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ dan kita buat pada tabel berikut.

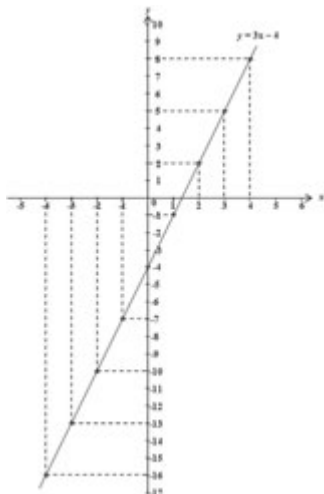
Tabel 2.6 Pasangan titik (x,y) untuk grafik $y = 3x - 4$

x	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{4}{3}$...
y	-16	-13	-10	-7	-4	0	...
(x,y)	$(-4, -16)$	$(-3, -13)$	$(-2, -10)$	$(-1, -7)$	$(0, -4)$	$(\frac{4}{3}, 0)$...

Dari data Tabel 2.6 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$$HP = \{(-4, -16), (-3, -13), (-2, -10), (-1, -7), (0, -4), (\frac{4}{3}, 0), \dots\}.$$

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian, dapat dikatakan bahwa grafik $y = 3x - 4$ memotong sumbu x pada titik $(\frac{4}{3}, 0)$ dan memotong sumbu y pada titik $(0, -4)$. Selanjutnya kita gambarkan grafik $y = 3x - 4$ pada koordinat kartesius dengan menggunakan pasangan nilai (x, y) tersebut.



Gambar 2.8 Grafik $y = 3x - 4$



Definisi 2.4

Misalkan a , b , dan c bilangan real dan a , b keduanya tidak nol.

Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.



Diskusi

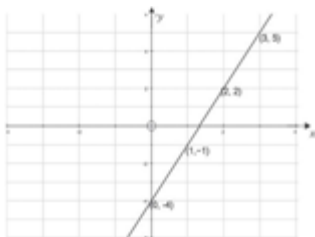
Berdasarkan Definisi-2.3, berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel memiliki anggota himpunan penyelesaian adalah tepat satu atau penyelesaian tunggal? Beri contoh persamaannya!
2. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota himpunan penyelesaian? Beri contoh persamaannya!



Uji Kompetensi 2.1

1. Salah satu penyakit sosial remaja sekarang ini adalah merokok. Ahli kesehatan merilis informasi bahwa, akibat menghisap satu batang rokok akan mengurangi waktu hidup seseorang selama 5,5 menit. Seorang remaja mulai merokok 1 (satu) batang rokok perhari sejak umur 15 tahun. Berapa umur remaja tersebut yang berkurang sampai dia berumur 40 tahun?
2. Perhatikan grafik di bawah ini!



Dari pasangan titik-titik yang diberikan, tentukanlah persamaan linear yang memenuhi pasangan titik-titik tersebut.

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian untuk setiap persamaan linear berikut ini!
 - a. $5x - 3y = 7$
 - b. $\frac{2}{3}y - 4x - 1 = 0$
 - c. $y = \frac{1}{3} - 5x$
4. Untuk dapat diterima sebagai suster di RS.SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut

adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut:

Tes Tertulis= 75, Psikotes =78, dan Tes Wawancara=85. Tentukan nilai terendah Tes Keterampilannya agar ia dapat diterima di rumah sakit tersebut.

5. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan $\frac{1}{6}$ dari berat benda di bumi. Tentukan berat maksimum astronot di bumi!
6. Seorang penderita diabetes sedang mengontrol berat badannya. Ia menggunakan indeks berat badannya dengan rumus $I = W/h^2$, dengan W adalah berat badan (kg), dan h adalah tinggi badan (meter). Nilai I yang dimiliki setiap orang memiliki arti sebagai berikut.
 - $25 < I$ berarti berat badan normal
 - $25 < I < 30$ berarti kelebihan berat badan
 - $30 < I < 35$ berarti obesitas ringan
 - $35 < I < 40$ berarti obesitas sedang
 - $40 < I$ berarti obesitas kronis
- a. Jika tinggi badan orang tersebut 175 cm, berapa berat badan maksimal supaya tergolong berat badan normal?
- b. Jika orang tersebut sudah memiliki berat badan 80 kg dan yang akan dikontrol adalah tinggi badan dengan melakukan suatu terapi tertentu, tentukan batas tinggi badan agar digolongkan dalam katagori kelebihan berat badan.
7. Gambarkanlah grafik $g(x) = |2x-1|$ untuk $1 < x < 10!$



Projek

Perhatikan bahwa persamaan linear dua variabel dapat dibuat grafiknya asal diketahui dua titik yang dilaluinya. Padahal, persamaan linear dua variabel memiliki dua koefisien dan satu konstanta. Selidiki apa implikasi dari kenyataan ini. Misal, selidiki apakah hanya ada satu persamaan linear dua variabel yang melalui dua titik yang sama. Apakah ini berarti ada beberapa persamaan linear dua variabel berbeda yang melalui dua titik yang sama. Ataupun walaupun banyak, semua persamaan linear dua variabel melalui dua titik yang sama sebenarnya adalah sama. Buat laporan hasil kegiatanmu dan paparkan di depan kelas.

3. Aplikasi Nilai Mutlak pada Persamaan Linier

Kamu telah menerima pemahaman lewat pengamatan terhadap beberapa kasus pada nilai mutlak dan persamaan linear satu dan dua variabel. Selanjutnya kamu akan menyelesaikan penerapan konsep nilai mutlak tersebut ke persamaan linier. Kamu diharapkan mampu memahami aplikasi kedua konsep tersebut.



Masalah-2.5

Sungai Bengawan Solo sering meluap pada musim hujan dan kering dimusim kemarau. Jika debit air sungai tersebut adalah p liter/detik pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah sebesar q liter/detik. Tunjukkanlah sketsa penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut!



Gambar 2.9 Sungai

Alternatif Penyelesaian

Telah kamu ketahui bahwa penyimpangan dari suatu nilai tertentu dapat dinyatakan dengan harga mutlak.



Misalkan debit air sungai = x

Simpangan x terhadap nilai pada cuaca normal = $|x - p|$. Karena perubahan debit air tersebut bernilai q maka $|x - p| = q$. Sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$.

Dari sketsa di atas, tampak jelas bahwa penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

4. Pertidaksamaan Linier

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas angkutan umum. Perhatikan masalah berikut!



Masalah-2.6

Ayah Budi lebih muda dibanding pamannya tetapi lebih tua dari ibunya. Sementara umur bibinya hanya satu tahun lebih tua dari umur ibunya tetapi satu tahun lebih muda dari umur ayahnya.

Budi berencana mengurutkan umur antara ayah, ibu, paman, dan bibinya berdasarkan umur mereka yang lebih tua.

Dapatkah kamu membantu Budi dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Pertama sekali didefinisikan variabel-variabelnya sebagai berikut:

Umur ayah = A Umur ibu = I

Umur paman = P Umur bibi = B

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Ayah lebih muda dibanding paman

$$A < P$$

b. Ayah lebih tua dari ibu

$$A > I \text{ atau } I < A$$

c. Umur bibi hanya satu tahun lebih tua dari umur ibu

$$B + 1 = I \text{ atau } B > I$$

d. Umur bibi satu tahun lebih muda dari ayah

$$B - 1 = A \text{ atau } B < A$$

Dengan mengamati pola di atas, yaitu $A < P$, $I < A$, $I < B$, dan $B < A$.

Urutan umur mereka mulai dari tertua ke termuda adalah $P > A > B > I$.

Sehingga kesimpulan adalah paman lebih tua dibanding ayah, ayah lebih tua dibanding bibi, dan bibi lebih tua dibanding ibu.



Diskusi

Diskusikan masalah urutan berikut dengan menggunakan metodemu sendiri! Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan di sungai setiap Sabtu. Suatu hari, setelah mereka selesai memancing, mereka menghitung banyak ikan yang mereka dapatkan masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua, juga masih lebih sedikit dibanding dengan tangkapan Pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Dalam metode kasus dijelaskan variabel yang dipergunakan, hubungan antar variabel berdasarkan informasi yang ada, dan kesimpulan yang kamu ambil berdasarkan hubungan-hubungan tersebut.



Masalah-2.7



Gambar 2.10 Tentara menembak

Seorang tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah kosong warga sipil. Dia berencana menembak obyek yang telah ditentukan di sebuah perbukitan. Jika $x = 0$ adalah posisi diam tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek diperkirakan memenuhi persamaan $2y - x - 0,66 = 0$. Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemungkinan lintasan peluru dapat berubah menjadi $y - 0,475x - 0,35 = 0$. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang 0,05 m oleh pengaruh-pengaruh perubahan arah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Lintasan peluru seharusnya $2y - x - 0,66 = 0$. Kenyataannya $y - 0,475x - 0,35 = 0$. Simpangan antara keduanya dapat dinyatakan sebagai selisih harga mutlak. Sehingga diperoleh

$$|(0,5x + 0,33) - (0,475x + 0,35)| \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow |0,025x - 0,02| \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(0,025x - 0,02)^2} \leq 0,05 \text{ dengan menggunakan kesetaraan } |x| = \sqrt{x^2}$$

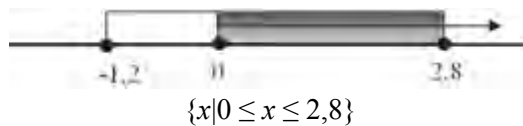
$$\Leftrightarrow (0,025x - 0,02)^2 \leq (0,05)^2$$

$$\Leftrightarrow (0,025x - 0,02)^2 - (0,05)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow [0,025x + 0,03][0,025x - 0,07] \leq 0$$

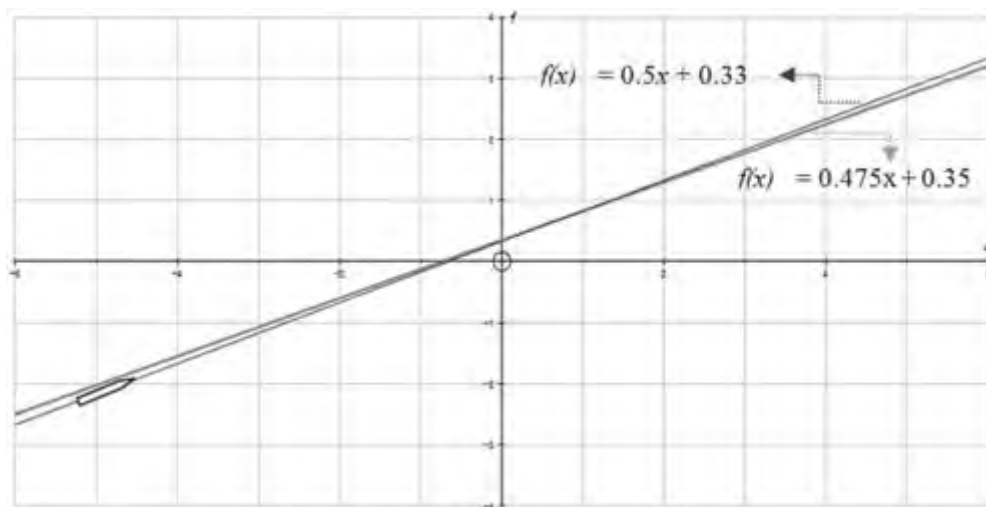
Nilai pembuat nol adalah $x = -1,2$ atau $x = 2,8$

Selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai negatif adalah $-1,2 \leq x \leq 2,8$, tetapi karena $x = 0$ adalah posisi diam tentara atau posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$. Dengan demikian, interval $-1,2 \leq x \leq 2,8$ akan kita iriskan kembali dengan $x \geq 0$ seperti berikut.



Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi sejauh 2,8 m dari posisi awal.

Permasalahan di atas dapat dinyatakan dengan grafik sebagai berikut.



Gambar 2.11 Lintasan Peluru

Dari Gambar 2,11, jelas kita lihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan (garis putus-putus). Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi sampai $x = 2,8$ m.

Contoh 2.4

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan metode umum $|2x + 1| \geq |x - 3|$!

Penyelesaian

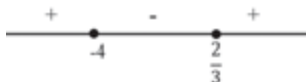
Langkah 1: Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
 |2x + 1| \geq |x - 3| &\Leftrightarrow \sqrt{(2x + 1)^2} \geq \sqrt{(x - 3)^2} \\
 &\Leftrightarrow (2x + 1)^2 \geq (x - 3)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 \geq 0 && \text{(bentuk kuadrat)} \\
 &\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 4) \geq 0
 \end{aligned}$$

Langkah 2: Menentukan pembuat nol.

$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3: Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan



Langkah 4: Menentukan interval penyelesaian.

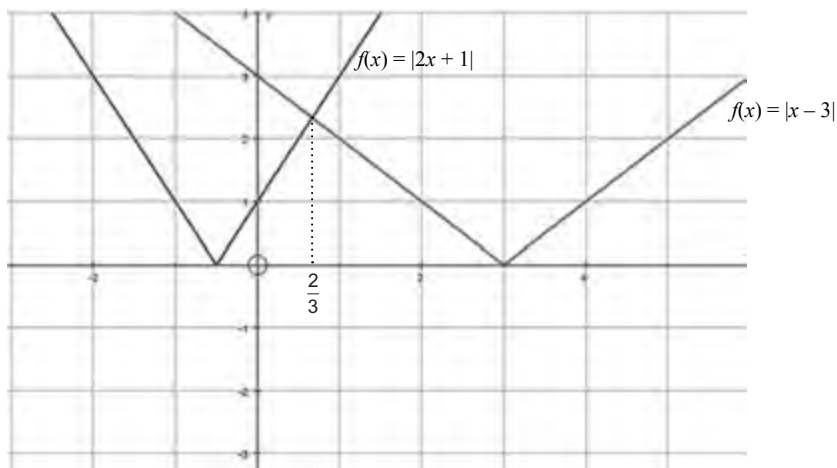
Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai positif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian arsiran pada interval di bawah ini adalah interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.



Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$HP = \left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Permasalahan di atas dapat diselidiki dengan memperlihatkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x + 3|$, untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan grafik pada Gambar 2.4, kita memperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 2.12 Grafik $f(x) = |2x + 1|$ dan $f(x) = |x + 3|$

Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dilihat sebagai grafik fungsi $f(x) = |2x + 1|$ berada di atas grafik $f(x) = |x - 3|$. Dari Gambar 2.11 terlihat bahwa pernyataan itu benar untuk nilai x dalam himpunan $\left\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R\right\}$. Coba gambar sendiri lanjutan kurvanya.

5. Aplikasi Nilai Mutlak pada Pertidaksamaan Linier

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke pertidaksamaan linier, dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.



Masalah-2.8



Gambar 2.13 Inkubator

Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus diinkubator selama beberapa hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama 2 hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100–2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C . Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar $0,2^{\circ}\text{C}$ maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator!

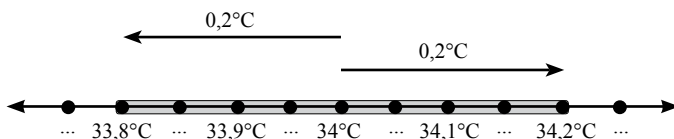
Alternatif Penyelesaian

Pada kasus bayi ini, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1–2 hari semenjak kelahiran adalah 34°C . Misalkan T adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruangan, dengan perubahan yang diharapkan sebesar $0,2^{\circ}\text{C}$, maka nilai mutlak suhu tersebut dapat kita modelkan, sebagai berikut:

$$|T - 34^{\circ}\text{C}| \leq 0,2^{\circ}\text{C}$$

Kasus ini dapat kita selesaikan melalui cara berikut.

Cara I. (Dengan mengamati sketsa)



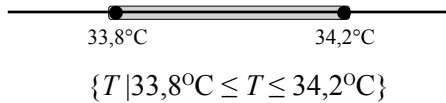
Gambar 2.14 Interval perubahan suhu

sehingga interval kenaikan suhu inkubator adalah interval $T \mid 33,8^{\circ}\text{C} \leq T \leq 34,2^{\circ}\text{C}$.

Cara II. (Secara Aljabar)

Dengan mengingat bahwa $|T| = \sqrt{T^2}$ maka:

$$\begin{aligned}
 |T - 34^{\circ}\text{C}| \leq 0,2^{\circ}\text{C} &\Leftrightarrow \sqrt{(T - 34^{\circ}\text{C})^2} \leq 0,2^{\circ}\text{C} && \text{(kuadratkan)} \\
 &\Leftrightarrow (T - 34^{\circ}\text{C})^2 \leq (0,2^{\circ}\text{C})^2 \\
 &\Leftrightarrow (T - 34^{\circ}\text{C})^2 - (0,2^{\circ}\text{C})^2 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow [(T - 34^{\circ}\text{C}) - (0,2^{\circ}\text{C})][(T - 34^{\circ}\text{C}) + (0,2^{\circ}\text{C})] \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow [T - 34,2^{\circ}\text{C}][T - 33,8^{\circ}\text{C}] \leq 0 \\
 &\text{Nilai pembuat nol adalah } T = 34,2^{\circ}\text{C} \text{ atau } T = 33,8^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}$$



Uji Kompetensi 2.2

Selesaikan soal-soal berikut.

1. Sketsalah grafik $y = \left| \frac{x}{3} - 2 \right| + 6$, untuk setiap nilai x bilangan real dengan terlebih dahulu menampilkan pasangan titik-titik yang dilalui grafik tersebut.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7	6	7	...
(x,y)	(3,7)	(6,6)	(9,7)	...

2. Seekor burung camar laut terbang pada ketinggian 17 meter melihat ikan pada jarak 25 meter sehingga ia terbang menukik ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali seperti gambar.



Jika kita asumsikan permukaan laut sebagai sumbu x maka fungsi pergerakan burung tersebut adalah $f(x) = |x - a| + b$ dengan a , b , dan x adalah bilangan real.

Tentukanlah nilai a dan b tersebut!

3. Buktikan:
- $|x^2| = x^2$
 - $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$
- Petunjuk: $|x| = \sqrt{x^2}$
4. Buktikan:
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
 - $|a - b| \leq |a| + |b|$
5. Buktikan bahwa grafik persamaan linear dua variabel adalah garis lurus!
6. Gambarkanlah semua titik (x,y) pada bidang yang memenuhi $|x + y| + |x - y| = 2$.

7. Gambarkanlah himpunan penyelesaian ketaksamaan linear berikut ini, dalam bentuk diagram garis!

- a. $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$
 b. $|x - 2| \leq |x + 1|$

Pilihlah jawaban yang benar.

8. Pertidaksamaan $2x - a < \frac{x-1}{2} + \frac{ax}{3}$ mempunyai penyelesaian $x > 5$. Nilai a adalah ...
 (A) 2
 (B) 3
 (C) 4
 (D) 5
 (E) 6

9. Semua nilai x yang memenuhi $0 < |x - 3| \leq 3$ adalah ...

- (A) $\{x | 0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
 (B) $\{x | 0 \leq x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
 (C) $\{x | 0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
 (D) $\{x | 0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in R\}$
 (E) $\{x | 0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in R\}$

10. Himpunan penyelesaian dari $|3x + 2| > 5$ adalah ...

- (A) $\{x | x < -\frac{1}{3} \text{ atau } x > 0, x \in R\}$
 (B) $\{x | x < -\frac{7}{3} \text{ atau } x > 1, x \in R\}$
 (C) $\{x | x < -1 \text{ atau } x > 1, x \in R\}$
 (D) $\{x | x < -\frac{1}{2} \text{ atau } x > 1, x \in R\}$
 (E) $\{x | x < -\frac{1}{4} \text{ atau } x > 0, x \in R\}$



Projek

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dalam persamaan linear. Misalkan saja besar tagihan telepon terhadap pemakaian.

- Dapatkan informasi tentang besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dengan persamaan linear dan bagaimana bentuk persamaan linear tersebut.
- Demikian juga dengan nilai mutlak. Ketelitian selalu dinyatakan dengan nilai mutlak, karena ketelitian tidak memperhatikan apakah penyimpangan pada nilai sebenarnya adalah positif atau negatif. Dengan kata lain, penyimpangan sebesar $-0,05$ adalah sama tidak telitinya dengan penyimpangan sebesar $0,05$.
- Dapatkan informasi tentang penggunaan nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari yang kamu jumpai.
- Buat laporan tentang hasil pencarian dan pengkajianmu serta paparkan hasilnya di depan kelas. Akan lebih menarik apabila kamu juga membandingkan beberapa alternatif pembayaran yang ditawarkan oleh penyedia jasa (misalnya: telepon, listrik) untuk menentukan alternatif mana yang paling menguntungkan sesuai dengan penggunaan.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear, maka dapat diambil berbagai simpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa simpulan disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak dari sebuah bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif. Misal $a \in \mathbb{R}$, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu x .
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in \mathbb{R}$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$. Demikian juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Bentuk umum dari persamaan linear dinyatakan: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear dua variabel.
4. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan pertidaksamaan $<$, \leq , $>$, dan \geq . Misal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, maka ditemukan pertidaksamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linear dua variabel.
5. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linear adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variabel yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaan linear dapat (1) tepat satu, (2) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian), atau (3) tidak punya penyelesaian.
6. Grafik persamaan linear satu atau dua variabel adalah sebuah garis lurus yang mungkin memotong sumbu x dan sumbu y atau tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y atau hanya memotong sumbu y .

Konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear telah kita temukan dan kita terapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan penyelesaian masalah matematika. Penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan menemukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, kamu pelajari berbagai metode penyelesaiannya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluru konsep dan aturan-aturan yang kita temukan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.

Bab 3

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

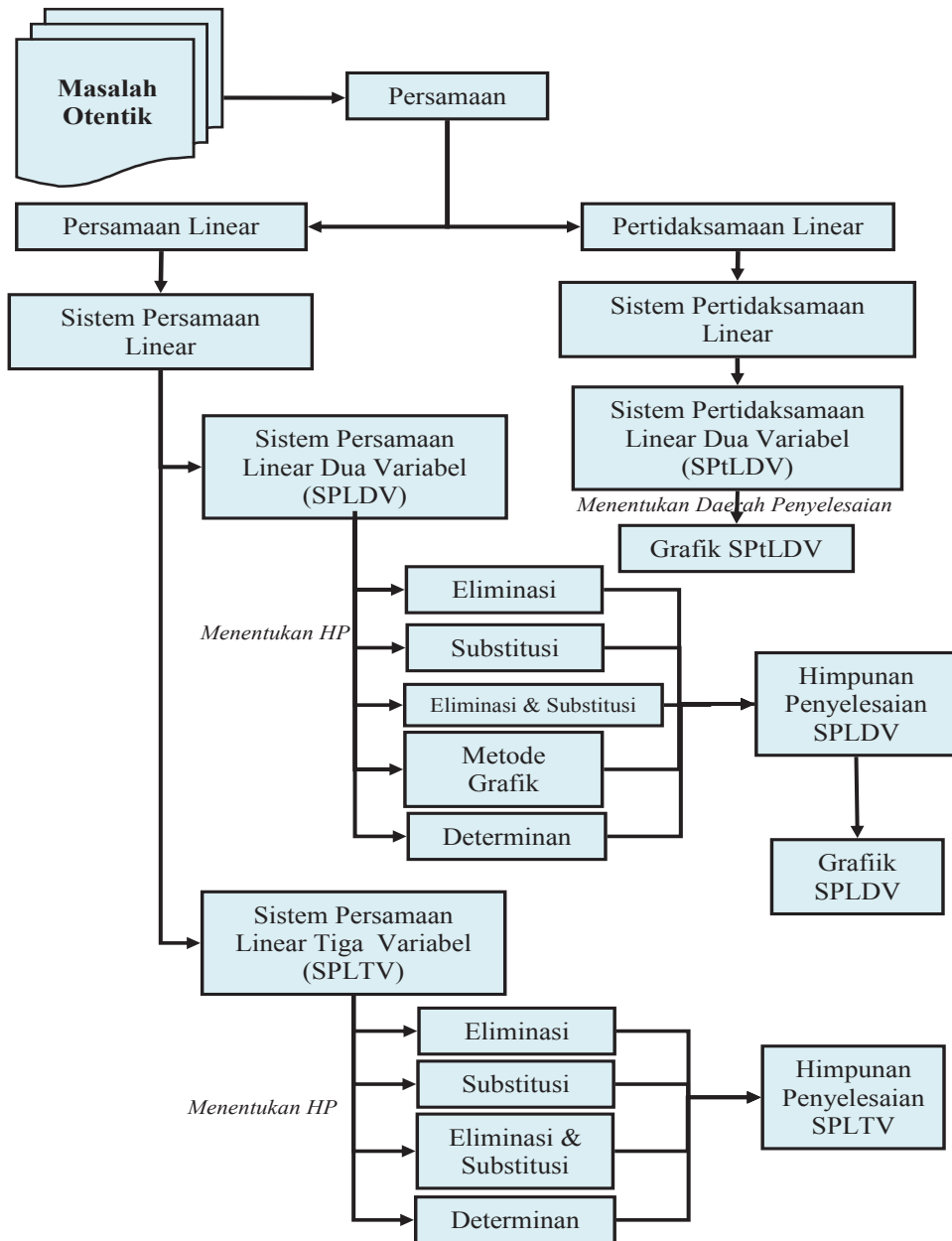
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari;2. memahami konsep sistem persamaan linear dua dan tiga variabel serta pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam penyelesaian masalah matematika;3. menggunakan SPLDV, SPLTV dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan;4. Membuat model matematika berupa SPLDV, SPLTV, dan SPtLDV dari situasi nyata dan menganalisis model sekaligus jawabnya;5. membuat model matematika berupa persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel yang melibatkan nilai mutlak dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya.	<p>Melalui pembelajaran materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPLDV atau SPLDV;• merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLDV atau SPLDV;• menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan;• menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan;• menemukan ciri-ciri SPLDV atau SPLDV dari model matematika;• menuliskan konsep SPLDV atau SPLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah Penting

- *SPL*
- *SPLDV*
- *SPLTV*
- *Himpunan Penyelesaian*
- *Grafik Persamaan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Dua Variabel

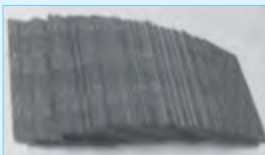
Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di kelas VIII SMP. Pada saat ini kita perdalam kajian, pemahaman dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah miliki sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini, kamu berupaya menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut kita jadikan bahan inspirasi dan menyusun model-model Matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, kita jadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear dua variabel.

Cermatilah masalah berikut!



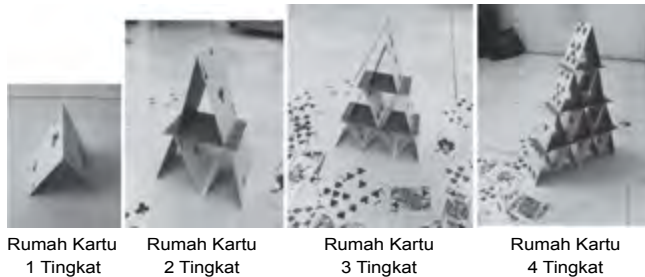
Masalah-3.1



Gambar 3.1 Kartu Bergambar

Kartu bergambar dapat dijadikan bahan inspirasi menemukan konsep dan aturan yang terkait dengan sistem persamaan linear melalui masalah yang dirancang.

Anto bermain kartu bergambar bersama temannya. Ketika mereka selesai bermain, Budi, adiknya Anto mengumpulkan kartu-kartu tersebut. Kemudian Ia asyik membangun rumah bertingkat yang diberi nama **Rumah Kartu**. Susunan kartu untuk setiap tingkatnya dapat dicermati pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Rumah Kartu Bertingkat

Setelah Budi menyusun beberapa rumah kartu bertingkat, ia bertanya dalam pikirannya, bagaimana hubungan di antara banyak kartu dan banyak tingkat rumah. Berapa banyak kartu yang dibutuhkan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat? Dapatkah kamu membantu Budi untuk menyelesaikan masalah tersebut?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apakah tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi? Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan. Selesaikanlah masalah di atas. Agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan dan pikirkan beberapa pertanyaan berikut:

- 1) informasi apa saja yang kamu temukan dalam masalah tersebut?
- 2) konsep apa saja yang terkait untuk menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkatnya?
- 3) bagaimana strategi kamu menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu bergambar yang digunakan?
- 4) misalkan t menyatakan banyak tingkat rumah dan k banyak kartu yang dipakai untuk setiap tingkat. Dapatkah kamu rumuskan aturan yang memasangkan banyak tingkat rumah dengan banyak kartu bergambar yang digunakan?
- 5) adakah kesulitan yang harus didiskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antara t dan k ?
- 6) apakah aturan pemasangan yang kamu rumuskan memenuhi situasi penyusunan kartu pada gambar di atas?
- 7) adakah sistem persamaan linear kamu temukan dari rumusan hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat?
- 8) dapatkah kamu menjawab permasalahan Budi? Berapa banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

Rumah kartu bertingkat 1 menggunakan kartu sebanyak 2 buah.

Rumah kartu bertingkat 2 menggunakan kartu sebanyak 7 buah.

Rumah kartu bertingkat 3 menggunakan kartu sebanyak 15 buah.

Rumah kartu bertingkat 4 menggunakan kartu sebanyak 26 buah.

Sehingga banyak tingkat dan banyak kartu dapat dikorespondensikan satu-satu membentuk suatu relasi sama dengan atau banyak kartu dapat dinyatakan dalam banyak tingkat rumah.

Temukan aturan yang memasangkan banyak tingkat (t) dengan banyak kartu (k).

Banyak Tingkat Rumah (t)	Banyak Kartu (k)	Pola Banyak Kartu
1	2	1 + 1 + 0
2	7	4 + 2 + 1
3	15	9 + 3 + 3
4	26	16 + 4 + 6

Cermati pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan 1, 2, 3, 4 adalah banyaknya tingkat rumah. Apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t^2 dan t ?

Misal x dan y adalah bilangan yang akan ditentukan sekaitkan dengan banyak kartu dan banyak tingkat rumah yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$k = x^2 + y t \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-a)}$$

Cermati kembali Gambar 3.2! Untuk mendapatkan model matematika berupa dua persamaan linear dengan variabel x dan y yang saling terkait.

Untuk $t = 1$ dan $k = 2$ diperoleh persamaan $x + y = 2$

Untuk $t = 2$ dan $k = 7$ diperoleh persamaan $4x + 2y = 7$

Dengan demikian kita peroleh dua buah persamaan linear dua variabel, yaitu

$$\begin{cases} x + y = 2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ 4x + 2y = 7 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

Ingat Kembali!

Materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP, yaitu tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik).

Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \quad | \times 4 | \\ 4x + 2y = 7 \quad | \times 1 | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \quad | \times 2 | \\ 4x + 2y = 7 \quad | \times 1 | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 - \\ \hline -2x = -2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

- ◆ Evaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik.

$$k = xt^2 + yt$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) \text{ (pernyataan benar)} \\ 7 = \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) \text{ (pernyataan benar)} \\ 15 = \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) \text{ (pernyataan benar)} \\ 26 = \frac{3}{2}(4)^2 + \frac{1}{2}(4) \text{ (pernyataan benar)} \end{array}$$

Dapat disimpulkan, aturan pengaitan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu adalah $k = xt^2 + yt$ dengan nilai konstanta x dan y adalah $\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$.

- ◆ Tentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat.

$$\text{Untuk } t = 30, \text{ diperoleh } k = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(30)$$

$$k = \frac{3}{2}(900) + 15 = 1365$$

Jadi, banyak kartu yang dibutuhkan membangun rumah kartu bertingkat 30 adalah 1365 buah kartu.

Perhatikan masalah berikut yang dirancang pada sebuah rumah adat salah satu suku di Indonesia.



Masalah-3.2



Gambar 3.3 Rumah Adat

Atap rumah terbuat dari ijuk pohon aren (Nira). Perbandingan banyak ijuk yang digunakan untuk menutupi permukaan atap bagian bawah dengan permukaan atap bagian tengah adalah 7 : 4. Perbandingan tinggi permukaan atap bagian bawah dengan tinggi permukaan atap bagian tengah adalah 3 : 2. Coba tentukan berapa panjang alas penampang atap bagian bawah dan tengah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Perbandingan luas penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 7 : 4.

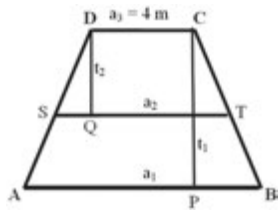
Perbandingan tinggi penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 3 : 2.

Ukuran garis puncak masing-masing atap adalah 4 m

Ditanya:

- Panjang alas penampang atap bagian bawah
- Panjang alas penampang atap bagian tengah

Perhatikan ilustrasi masalah seperti gambar berikut!



Perhatikan gambar di samping, konsep apa yang melekat pada penampang atap rumah adat tersebut.

Misalkan panjang $AB = a_1$, $ST = a_2$, dan $DC = a_3 = 4$ m

Misal: Luas penampang atap bawah ($ABCD$) = L_1

Luas penampang atap tengah ($STCD$) = L_2

Karena penampang atap rumah berbentuk trapesium, maka

$$L_1 = \frac{1}{2}(AB + DC) \times \text{tinggi}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_3) \times t_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(ST + DC) \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times (a_2 + a_3) \times t_2$$

Karena perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah adalah 7 : 4, dapat diartikan bahwa $L_1 : L_2 = 7 : 4$.

Petunjuk

Lakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan linier.

$$L_1 : L_2 = 7 : 4 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_3)t_1}{(a_2 + a_3)t_2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 4 \text{ m dan } t_1 : t_2 = 3 : 2 \Rightarrow \frac{3(a_1 + 4)}{2(a_2 + 4)} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 + 4)}{(a_2 + 4)} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 6a_1 + 24 = 7a_2 + 28$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 7a_2 = 4$$

$$\therefore 6a_1 - 7a_2 = 4 \dots\dots\dots(\text{Persamaan-1})$$

Cermati bahwa trapesium $ABCD$ dan trapesium $STCD$ adalah sebangun.

$$PB = \frac{1}{2}(a_1 - a_3) \text{ dan } SQ = \frac{1}{2}(a_2 - a_3)$$

Karena trapesium $ABCD$ dan trapesium $STCD$ adalah sebangun maka

$$\frac{PB}{SQ} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - 4}{a_2 - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 8 = 3a_2 - 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\therefore 2a_1 - 3a_2 = -4 \dots\dots\dots(\text{Persamaan-2})$$

Dengan demikian, kita telah memperoleh dua persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 yang saling terkait, yaitu:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a_1 - 7a_2 = 4 \dots\dots\dots(\text{Persamaan-1}) \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 \dots\dots\dots(\text{Persamaan-2}) \end{array} \right.$$

Dari Persamaan-1 diperoleh

$$6a_1 - 7a_2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \dots\dots\dots(\text{Persamaan-3})$$

Substitusikan persamaan-3 ke persamaan-2, diperoleh

$$a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}\right) - 3a_2 = -4$$

Ingat Kembali!

Syarat dua bangun datar dikatakan sebangun.

$$\Rightarrow \frac{14}{6}a_2 + \frac{8}{6} - \frac{18}{6}a_2 = -\frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{6}a_2 = \frac{-32}{6}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8$$

$$a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} = \frac{56}{6} + \frac{4}{6} = \frac{60}{6}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10$$

Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah $a_1 = 10$ m dan panjang alas penampang atap bagian tengah $a_2 = 8$ m.



Diskusi

Masih ingatkah kamu contoh sistem persamaan linear dua variabel ketika belajar di SMP. Perhatikan kembali setiap langkah penyelesaian Masalah-3.1 dan Masalah-3.2.

- ◆ Coba temukan contoh sistem persamaan linear dari setiap permasalahan yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel.
- ◆ Temukan ciri-ciri sistem persamaan linear tersebut dan diskusikan dengan temanmu secara klasikal.



Definisi 3.1

Sistem persamaan linear adalah himpunan beberapa persamaan linear yang saling terkait, dengan koefisien-koefisien persamaan adalah bilangan real.

Sistem persamaan linear dua variabel merupakan sistem persamaan linear. Berikut ini, didefinisikan sistem persamaan linear dua variabel.



Definisi 3.2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah suatu sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1,$ dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya 0; a_2 dan b_2 tidak keduanya 0.

x, y : variabel

a_1, a_2 : koefisien variabel x

b_1, b_2 : koefisien variabel y

c_1, c_2 : konstanta persamaan



Diskusi

Ujilah pemahamanmu. Diskusikan permasalahan di bawah ini dengan kelompokmu.

1. Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$. Apakah kedua persamaan ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel?
2. Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Apakah kedua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel?



Contoh 3.1

Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Kedua persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab kedua persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x + 0y = 3$ dan $0x + y = -2$ dan pemaknaan setiap variabel pada kedua persamaan adalah sama.

Untuk lebih mendalami sistem persamaan linier, cermatilah masalah berikut.



Masalah-3.3

Buktikan bahwa untuk setiap n , $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ tidak dapat disederhanakan.

Petunjuk:

Cobalah berdiskusi dengan temanmu untuk membuktikan pernyataan tersebut! Untuk membuktikan kebenaran pernyataan tersebut, perlu kamu memahami makna sebuah pecahan tidak dapat disederhanakan. Apa kaitan masalah tersebut dengan faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan. Di dalam proses pembuktiannya kamu menemukan keterkaitannya dengan materi sistem persamaan linear dua variabel.

Alternatif Penyelesaian

Selanjutnya perhatikan kedua sistem persamaan linear dua variabel berikut.

1. Diberikan $2x + 3y = 0$ dan $4x + 6y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian, misalnya, $(3, -2)$, $(-3, 2)$ dan termasuk $(0,0)$. Di samping itu, kedua persamaan memiliki suku konstan adalah nol dan grafik kedua persamaan berimpit. Apabila sebuah SPLDV mempunyai penyelesaian tidak semuanya nol dikatakan memiliki penyelesaian yang *tak trivial*.
2. Diberikan $3x + 5y = 0$ dan $2x + 7y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan adalah nol dan mempunyai penyelesaian tunggal; yaitu, untuk $x = 0, y = 0$. Apabila sebuah SPLDV hanya memiliki penyelesaian $x = 0$ dan $y = 0$ disebut *penyelesaian trivial*.

Kedua sistem persamaan linear di atas adalah sistem persamaan linear yang homogen.



Definisi 3.3

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear dengan suku konstan sama dengan nol dan memenuhi salah satu dari dua hal berikut:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.

Untuk mendalami pemahaman kamu, mari cermati contoh berikut.



Contoh 3.2

Untuk nilai σ apakah sistem persamaan

$$\left. \begin{aligned} (\sigma - 3)x + y &= 0 \\ x + (\sigma - 3)y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

mempunyai penyelesaian yang tak trivial?

Penyelesaian

$$(\sigma - 3)x + y = 0 \Leftrightarrow y = -(\sigma - 3)x.$$

Kita substitusikan persamaan $y = -(\sigma - 3)x$ ke persamaan $x + (\sigma - 3)y = 0$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + (\sigma - 3)(-\sigma + 3)x &= 0 \Rightarrow x + (-\sigma^2 + 6\sigma - 9)x = 0 \\ &\Rightarrow x = (\sigma^2 - 6\sigma + 9)x \end{aligned}$$

Agar mempunyai penyelesaian tak trivial, maka $x \neq 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(\sigma^2 - 6\sigma + 9) = 1 &\Rightarrow \sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0 \\ &\Rightarrow (\sigma - 4)(\sigma - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \sigma = 4 \text{ atau } \sigma = 2\end{aligned}$$

• Ingat makna $a \times b = 0$

Agar sistem persamaan $(\sigma - 3)x + y = 0$ dan $x + (\sigma - 3)y = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial, pastilah $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$.

- ◆ Coba uji nilai $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$ ke dalam persamaan. Apakah benar sistem tersebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.



Uji Kompetensi 3.1

1. Angga anak Pak Purwoko memiliki setumpuk kartu. Keseluruhan kartu dapat dipilah menjadi dua bagian menurut bentuknya. Satu jenis berbentuk persegi yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan empat ekor burung. Satu jenis lagi berbentuk segitiga yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan dua ekor burung. Lihat gambar berikut!
2. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
 - a. $xy + 5z = 4, y \in R$ dan $2x - 3z = 3$.
 - b. $x - 3 = 0$ dan $y - 5 = 1$.
3. Jelaskan mengapa penyelesaian sebuah sistem persamaan linear (SPL) adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut: tidak punya penyelesaian, atau memiliki tepat satu penyelesaian atau memiliki tak berhingga penyelesaian!



Berapa banyak kartu persegi dan segitiga yang harus diambil dari tumpukan kartu agar jumlah gambar kerbau 33 dan jumlah gambar burung 100.

SOAL TANTANGAN

4. Sebuah perahu yang bergerak searah arus sungai dapat menempuh jarak 46km dalam 2 jam. Jika perahu tersebut bergerak berlawanan dengan arah arus sungai dapat menempuh jarak 51 km dalam 3 jam. Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai?



Projek

Cari sebuah SPLDV yang menyatakan pemodelan nyata yang kamu jumpai di lingkungan sekitarmu. Uraikan deskripsi pemodelan tersebut dan langkah-langkah yang kamu ambil untuk dapat menyatakan pemodelan tersebut dalam SPLDV. Kemudian SPLDV yang kamu peroleh diinterpretasikan hasilnya. Buat dalam bentuk laporan dan paparkan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Tiga Variabel

Konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu temukan dari masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budayamu. Dengan cara yang analog kita akan menemukan konsep sistem persamaan linear tiga variabel melalui penyelesaian masalah-masalah nyata. Perbedaan sistem persamaan linear dua variabel dengan sistem persamaan linear tiga variabel terletak pada banyak variabel yang akan ditentukan nilainya. Sekarang cermati beberapa masalah yang diajukan.

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung, ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari Kakeknya. Dalam melakukan pekerjaannya, ia dibantu dua anaknya; yaitu Gede dan Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan.



Gambar 3.4 Ukiran patung dan ornamen



Masalah-3.4

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan, sesuai batas waktu yang diberikan?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah, manfaatkan pengetahuan dan keterampilan yang sudah kamu miliki untuk menemukan aturan, hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui. Dalam menyelesaikan masalah di atas, langkah penyelesaiannya tersirat dalam beberapa pertanyaan berikut.

- 1) Bagaimana kamu menentukan kecepatan Pak Wayan, Putu, dan Gede bekerja menyelesaikan satu unit pesanan ukiran tersebut?
- 2) Dapatkah kamu menentukan hubungan tiap-tiap kecepatan untuk menyelesaikan pekerjaan dalam bentuk persamaan?
- 3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
- 4) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?.
- 5) Bagaimana hubungan antara konsep jarak dan kecepatan dalam menentukan lamanya waktu yang digunakan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan?
- 6) Adakah jawaban permasalahan yang kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 bulan.

Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen:

Pak Wayan dan Putu adalah 7 bulan

Pak Wayan dan Gede adalah 6 bulan

Putu dan Gede adalah 8 bulan

Ditanya: Waktu yang diperlukan bila ketiganya bekerja bersama-sama.

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan (bulan) Pak Wayan adalah x

Waktu yang dibutuhkan (bulan) Putu adalah y

Waktu yang dibutuhkan (bulan) Gede adalah z

Berarti pekerjaan yang dapat diselesaikan Pak Wayan, Putu, dan Gede dengan waktu x , y , dan z , masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$ bagian pekerjaan.

- ◆ Bila Pak Wayan dan Putu bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Putu membutuhkan 7 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$7\frac{1}{x} + 7\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

- ◆ Bila Pak Wayan dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Gede membutuhkan 6 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$6\frac{1}{x} + 6\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

- ◆ Bila Putu dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Putu dan Gede membutuhkan 8 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$8\frac{1}{y} + 8\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)}$$

- Temukan tiga persamaan linear yang saling terkait dari persamaan-1, 2, dan 3 di atas!
- Miasalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Tentukan nilai p , q , dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya! Sebagai alternatif pilihan adalah metode campuran eliminasi dan substitusi.

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-1 dan 2 diperoleh:

$$\begin{array}{l} 7p + 7q = 1 \quad | \times 6 \quad | \\ 6p + 6r = 1 \quad | \times 7 \quad | \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42p + 42q = 6 \\ 42p + 42r = 7 \quad - \\ \hline 42q - 42r = -1 \end{array}$$

$$\therefore 42q - 42r = -1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-4)}$$

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-3 dan 4 diperoleh

$$\begin{array}{r} 8q + 8r = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \times 42 \\ \times 8 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{r} 336q + 336r = 42 \\ 336q - 336r = -8 \quad - \\ \hline 672r = 50 \end{array} \end{array}$$

Dari $672r = 50$ diperoleh $r = \frac{50}{672}$

$r = \frac{50}{672}$ disubstitusikan ke persamaan $8q + 8r = 1$ diperoleh $q = \frac{34}{672}$

$q = \frac{34}{672}$ disubstitusikan ke persamaan $7p + 7q = 1$ diperoleh $p = \frac{62}{672}$

Sebelumnya telah kita misalkan

$$p = \frac{1}{x} \text{ dan } p = \frac{62}{672} \Rightarrow x = \frac{672}{62} = 10,8$$

$$q = \frac{1}{y} \text{ dan } q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19,76$$

$$r = \frac{1}{z} \text{ dan } r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13,44$$

Karena $x, y,$ dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu dan Gede menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 bulan, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 bulan, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 bulan.

Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\left(\frac{62}{672} + \frac{34}{672} + \frac{50}{672} \right)} \\ &= \frac{672}{146} \end{aligned}$$

$$t = 4,6 \text{ bulan}$$

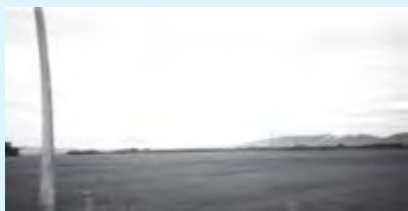
Karena waktu yang diberikan turis adalah 5 bulan, maka ternyata pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

Cermati masalah petani di daerah Toba berikut ini!

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya adalah sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan coklat, dan sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba). Keterkaitan dan kebergunaan Matematika (khususnya materi sistem persamaan linear) untuk menyelesaikan masalah yang dialami para petani, karyawan, dan para pedagang dapat dicermati lebih jauh. Ketika kita menyelesaikan masalah-masalah tersebut menggunakan kerja matematika (coba-gagal, matematisasi, pemodelan masalah secara Matematika, melakukan abstraksi, idealisasi, dan generalisasi), kita temukan konsep dan aturan-aturan Matematika secara formal. Sekarang mari kita angkat sebuah permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea di Kabupaten Toba Samosir. Permasalahannya terkait pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal.



Masalah-3.5



Gambar 3.5: Pematang sawah Pak Panjaitan

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP) yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Panjaitan sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apa tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi. Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan untuk mencapai tujuan. Jika kamu mengalami kesulitan silahkan berdiskusi dengan teman atau bertanya kepada guru. Sebagai arahan/petunjuk pengerjaan masalah, ikuti pertanyaan-pertanyaan berikut!

- 1) Bagaimana kamu menggunakan variabel menyatakan banyak pupuk yang digunakan untuk setiap jenisnya dan hubungan pemakaian antar jenis pupuk?
- 2) Bagaimana kamu menggunakan variabel menyatakan hubungan harga setiap jenis pupuk dengan dana yang tersedia?
- 3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah terkait dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?

- 4) Apakah ada kesulitan yang harus kamu diskusikan dengan teman atau bertanya pada guru untuk menentukan hubungan antar variabel, melakukan manipulasi aljabar, kepastian strategi yang kamu pilih ?
- 5) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?
- 6) Berapa sak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan untuk setiap jenisnya? Masuk akalakah jawaban kamu?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

- Tiga jenis pupuk: Urea, SS, TSP. Harga per karung untuk setiap jenis pupuk Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00.
- Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.
- Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak dari pupuk SS.
- Dana yang tersedia Rp4.020.000,00.

Ditanya:

Berapa karung untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

Misalkan: x adalah banyak pupuk Urea yang dibutuhkan (karung)

y adalah banyak pupuk SS yang dibutuhkan (karung)

z adalah banyak pupuk TSP yang dibutuhkan (karung)

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$$x + y + z = 40 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

$$x = 2y \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

$$75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)}$$

- Substitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-1, sehingga diperoleh

$$x = 2y \text{ dan } x + y + z = 40 \Rightarrow 2y + y + z = 40$$

$$\therefore 3y + z = 40 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-4)}$$

- Substitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-3, sehingga diperoleh

$$x = 2y \text{ dan } 75x + 120y + 150z = 4.020 \Rightarrow 150y + 120y + 150z = 4.020$$

$$\Rightarrow 270y + 150z = 4.020$$

Sederhanakan persamaan sehingga diperoleh

$$\therefore 27y + 15z = 402 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-5)}$$

Untuk menentukan nilai y atau z , terapkan metode eliminasi terhadap Persamaan-4 dan Persamaan-5.

$$\begin{array}{l} 3y + z = 40 \\ 27y + 15z = 402 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 15 \\ \times 1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{r} 45y + 15z = 600 \\ 27y + 15z = 402 \quad - \\ \hline 18y = 198 \end{array}$$

$$18y = 198 \Rightarrow y = 11$$

$$y = 11 \text{ dan } x = 2y \Rightarrow x = 22$$

Dengan substitusikan $x = 22$ dan $y = 11$ ke persamaan $x + y + z = 40$, diperoleh $z = 7$. Dengan demikian nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$. Dapat diinterpretasikan bahwa banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 sak pupuk Urea, 11 sak pupuk SS, dan 7 sak pupuk TSP.

Ingat Kembali!

Pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya dan mencermati kembali Persamaan-1, 2, dan 3 pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5. Temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5!

- Dari penyelesaian Masalah 3.4 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ 6p + 6r = 1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \\ 8q + 8r = 1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$
- Dari penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ x = 2y \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \\ 75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$
- Tuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya dengan teman secara klasikal.



Definisi 3.4

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi:

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x , y , dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2,$ dan d_3 bilangan real, dan $a_1, b_1,$ dan c_1 tidak ketiganya 0; $a_2, b_2,$ dan c_2 tidak ketiganya 0; dan $a_3, b_3,$ dan c_3 tidak ketiganya 0.
 x, y, z : variabel

a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x

b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y

c_1, c_2, c_3 : koefisien variabel z

d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

- ◆ Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 3.3

Diberikan tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2, 2p + 3q - r = 6,$ dan $p + 3q = 3.$

Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel

sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linear. Jika persamaan

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ diselesaikan diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak

linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 3.4

Diberikan dua persamaan $x = -2; y = 5;$ dan $2x - 3y - z = 8.$ Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left. \begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned} \right\}$$

dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) berikut.

1. Diberikan *SPLTV* $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian; misalnya, $(3, -2, 0)$, $(-3, 2, 0)$ dan termasuk $(0, 0, 0)$. Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu *SPLTV* tidak semuanya nol, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
2. Diberikan *SPLTV* $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu *SPLTV* memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian trivial ($x = y = z = 0$).

Sebuah *SPLTV* dengan semua konstanta sama dengan nol disebut *SPLTV* homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka *SPLTV* tersebut tidak homogen. *SPLTV* yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki penyelesaian yang *trivial* atau memiliki banyak penyelesaian *nontrivial* selain satu penyelesaian *trivial*. Coba tuliskan definisi *SPLTV* yang homogen dan berikan contohnya, selain contoh di atas.

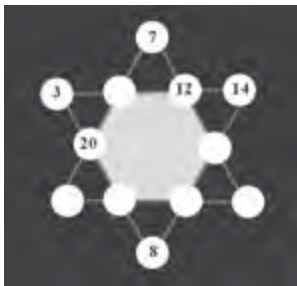


Uji Kompetensi 3.2

1. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
 - a. $2x + 5y - 2z = 7$, $2x - 4y + 3z = 3$
 - b. $x - 2y + 3z = 0$, $y = 1$, dan $x + 5z = 8$
2. Diberikan tiga buah persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 9$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$; dan $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
3. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 cm,
 - a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan!
 - b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?

berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?

4.



Isilah lingkaran kosong pada “bintang ajaib” dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama! Isilah lingkaran kosong pada “bintang ajaib” dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama!

5. Diberikan sistem persamaan linear berikut.

$$x + y + z = 4$$

$$z = 2$$

$$(t^2 - 4)z = t - 2$$

Berapakah nilai t agar sistem tersebut tidak memiliki penyelesaian, satu penyelesaian dan tak berhingga banyak penyelesaian?

6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$!

7. Diberikan dua persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $a^2 + b^2 - c^2$!

8. **SOAL TANTANGAN**



Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri dari 1 kg jenis A , 2 kg jenis B , dan 3 kg jenis C dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis A dan 3 kg jenis B dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri dari 1 kg jenis B dan 1 kg jenis C dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?



Projek

Cari sebuah *SPLTV* yang menyatakan permasalahan nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan permasalahan tersebut dan langkah-langkah yang kamu lakukan untuk menyatakan dalam *SPLTV*. Kemudian selesaikan *SPLTV* yang diperoleh dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan hasil kerja dan paparkan di depan kelas.

3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Di kelas VIII SMP, kamu telah mempelajari berbagai metode menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*). Metode-metode tersebut antara lain: metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan campuran ketiga metode tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari keempat metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulang kembali mempelajari metode-metode tersebut.

1) Metode Grafik

Berdasarkan Definisi 3.2, *SPLDV* terbentuk dari dua persamaan linear yang saling terkait. Sebelumnya kamu telah mengetahui bahwa grafik persamaan linear dua variabel berupa garis lurus. Pada langkah penyelesaian Masalah 3.1 telah diperoleh sistem persamaan linear dua variabel

$$x + y = 2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

$$4x + 2y = 7 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

Bagaimana menggambar grafik (kurva) Persamaan-1 dan 2 di atas?
Langkah-langkah untuk menggambarkan grafik kedua persamaan linear tersebut tersirat dalam pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana strategi kamu untuk mendapatkan titik-titik yang dilalui grafik kedua persamaan linear tersebut?
- 2) Apakah kamu masih ingat apa yang dimaksud gradien suatu garis lurus?
- 3) Ada berapa kemungkinan posisi dua garis dalam satu sumbu koordinat. Mengapa hal itu terjadi, pikirkan apa alasan kamu, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang kamu miliki untuk mencari hubungan-hubungan kedua garis lurus tersebut?
- 4) Dapatkah kamu gambarkan kemungkinan posisi dua garis lurus tersebut dalam sumbu koordinat?
- 5) Untuk persamaan yang diberikan, bagaimana posisi kedua grafik persamaan tersebut? Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh. Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas.

- ◆ Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-1

	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

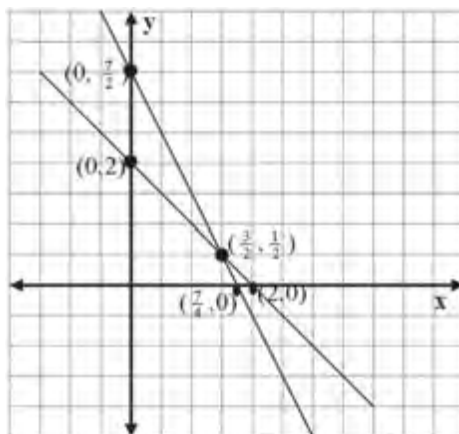
Diperoleh titik-titik potong kurva $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, 2)$ dan $(2, 0)$.

- ◆ Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-2

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $4x + 2y = 7$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, \frac{7}{2})$ dan $(\frac{7}{4}, 0)$.

- ◆ Menarik garis lurus dari titik $(0, 2)$ ke titik $(2, 0)$ dan dari titik $(0, \frac{7}{2})$ ke titik $(\frac{7}{4}, 0)$.



Gambar 3.6 Grafik persamaan linear

Berdasarkan gambar grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ adalah $\left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

2) Metode Eliminasi

Metode eliminasi yang kamu kenal di SMP sudah kita terapkan terhadap *SPLDV* $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ pada langkah penyelesaian Masalah-3.1. Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} -$$

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} -$$

$$-2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut.

Berdasarkan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel, bagaimana cara menentukan variabel sistem persamaan linear penyelesaiannya dengan metode eliminasi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

dengan $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1,$ dan c_2 bilangan real, dan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah ini, Apakah kamu memahami tujuan masalah dipecahkan? Bagaimana strategi kamu memanfaatkan pengetahuan yang telah kamu miliki? Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

1. Apa yang dimaksud mengeliminasi variabel x atau y dari Persamaan-1 dan 2 di atas?
2. Berapa kemungkinan melakukan eliminasi agar nilai x dan y diperoleh?
3. Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh? Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?
4. Strategi apa yang kamu gunakan untuk menguji bahwa himpunan penyelesaian yang kamu peroleh sudah benar?

3) Metode Substitusi

Himpunan penyelesaian SPLDV $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$. Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut dengan mengikuti langkah metode substitusi di atas.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode substitusi?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{..... (Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{..... (Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ adalah bilangan-bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ dan } a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$$

$x = -\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$ substitusi ke persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_2 \left(-\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1} \right) + b_2y &= c_2 \\ \Rightarrow -\frac{a_2b_1}{a_1}y + \frac{a_2c_1}{a_1} + \frac{a_1c_2}{a_1}y &= \frac{a_2c_2}{a_1} \\ \Rightarrow \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1}y &= \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1} \\ \Rightarrow y &= \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)} \end{aligned}$$

$y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$ dan diperoleh

$$x = -\frac{b_1(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1}{a_1} \Rightarrow x = \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{ \left(\frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)} \right) \right\}$.

4) Metode Eliminasi dan Substitusi

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1,$ dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.



Diskusi

Berdasarkan kedudukan kedua garis dalam satu sumbu koordinat, tentukan berapa kemungkinan penyelesaian suatu *SPLDV*. Diskusikan dengan temanmu. Beri contoh *SPLDV* untuk tiga kasus, gambarkan grafiknya dalam sumbu koordinat dan tentukan penyelesaiannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Sehingga penentuan himpunan penyelesaian *SPLTV* dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian *SPLDV*, kecuali dengan metode grafik. Cara lain yang dapat kamu gunakan selain metode eliminasi,

substitusi, dan campuran eliminasi substitusi (kamu coba sendiri) untuk menentukan penyelesaian *SPLTV* adalah cara determinan, menggunakan invers matriks yang akan kamu pelajari di kelas XII. Sekarang kita akan temukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus?

- ◆ Tentukan himpunan penyelesaian *SPLTV* secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode Sarrus.

Berdasarkan Definisi 3.4, bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x , y , dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2,$ dan d_3 bilangan real, dan $a_1, b_1,$ dan c_1 tidak ketiganya 0; $a_2, b_2,$ dan c_2 tidak ketiganya 0; dan $a_3, b_3,$ dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah-1: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-2

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times a_2 \\ \times a_1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-4)}$$

Langkah-2: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-3

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times a_3 \\ \times a_1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \quad - \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \dots\dots\dots \text{(Persamaan-5)}$$

Langkah-3: Eliminasi variabel y dari Persamaan-4 dan Persamaan-5

$$\begin{array}{l|l} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-4 terhadap Persamaan-5 dan hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-5 terhadap Persamaan-4 maka diperoleh

$$\begin{aligned} z &= \frac{((a_2d_1 - a_1d_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3d_1 - a_1d_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}{((a_2c_1 - a_1c_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3c_1 - a_1c_3)(a_2b_1 - a_1b_2))} \\ z &= \frac{((a_1a_3b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2) - (a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3))}{((a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_2b_1c_2) - (a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3))} \\ z &= \frac{((a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2) - (a_1b_2d_3 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3))}{((a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2) - (a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3))} \\ z &= \frac{((a_3b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3) - (a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1))}{((a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3) - (a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1))}. \end{aligned}$$

- ◆ Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x , y dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ \hline a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \hline a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ \hline \end{array}}$$

Petunjuk:

- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z , ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & a_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$



Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk x , y , dan z di atas. Ketiga ciri-ciri tersebut mudah diingat. Sehingga memudahkan dalam mencari penyelesaian *SPLTV*. Sebelum metode Sarrus digunakan, *SPLTV* harus dibentuk dalam standar.

Pada langkah penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$$x + y + z = 40 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

$$x = 2y \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

$$75 + 120y + 150z = 4.020 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)}$$

Ingat untuk menggunakan metode Sarrus semua variabel harus pada ruas kiri, dan semua konstanta berada pada ruas kanan. Untuk itu *SPLTV* di atas diubah menjadi

$$x + y + z = 40 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-1)}$$

$$x - 2y = 0 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-2)}$$

$$75 + 120y + 150z = 4.020 \quad \dots\dots\dots \text{(Persamaan-3)}$$

Dengan menerapkan metode Sarrus pada *SPLTV* di atas, tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 75 \\ b_1 = 1 & b_2 = -2 & b_3 = 120 \\ c_1 = 1 & c_2 = 0 & c_3 = 150 \\ d_1 = 40 & d_2 = 0 & d_3 = 4020. \end{array}$$

Oleh karena itu, nilai x , y , dan z ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 & 40 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 4020 & 120 & 150 & 4020 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{vmatrix}} = \frac{(-8040 + 0 + 0) - (-12000 + 0 + 0)}{(-150 + 0 + 150) - (-300 + 0 + 120)} = \frac{3960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75 & 4020 & 150 & 75 & 4020 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{vmatrix}} = \frac{(0 + 0 + 6000) - (0 + 0 + 4020)}{180} = \frac{1980}{180} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 4020 & 75 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{vmatrix}} = \frac{(-6000 + 0 + 4020) - (-8040 + 4800)}{180} = \frac{1260}{180} = 7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian *SPLTV* tersebut adalah $H_p = \{(22, 11, 7)\}$. Ternyata hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode eliminasi dan substitusi sebelumnya.

- ◆ Dengan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada penyelesaian di atas, coba kamu tuliskan ciri-ciri suatu himpunan penyelesaian *SPL* dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas, dapat kita tuliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.



Definisi 3.5

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.



Definisi 3.6

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear.

Sedangkan untuk *SPLDV* dan *SPLTV*, himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 3.7

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.



Definisi 3.8

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah himpunan semua triple terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.



Uji Kompetensi 3.3

1. Tiga tukang cat, Joni, Deni, dan Ari, bekerja secara bersama-sama, dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang ini bekerja mengecat rumah serupa ini selama 4 jam kerja, setelah itu Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang, jika bekerja sendirian!
2. Sebuah bilangan terdiri dari atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih dari pada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut!
3. Sebuah pabrik memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu

minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu?

4. Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear berikut ini tanpa menggunakan cara aljabar, melainkan melalui metode grafik!

i. $x - y = 3$
 $5x + 3y = 9$

ii. $2x - y = 0$
 $7x + 2y = 11$

iii. $3x - 2y = 2$
 $-x + 5y = 21$

iv. $4x - \frac{1}{2}y = 8$
 $12x + 7y = -4$

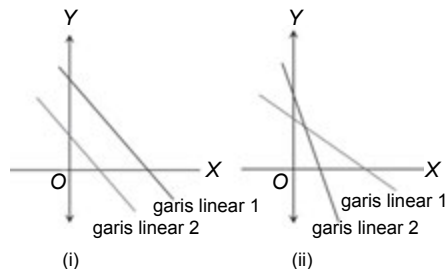
5. Kembali perhatikan sistem persamaan linear dua variabel,

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Mungkinkah sistem tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian? Jika ya, tentukan syaratnya dan gambarkan!

6. Perhatikan kedua grafik sistem persamaan linear di bawah ini!



Gambar (i) dan (ii) merupakan grafik sistem persamaan linear dua variabel,

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

- a) Tentukan syarat yang dimiliki sistem supaya memiliki grafik seperti gambar (i) dan (ii)!
- b) Jelaskanlah perbedaan himpunan penyelesaian grafik (i) dan (ii)!
7. Diberikan sistem persamaan linear tiga variabel,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Tentukan syarat yang dipenuhi sistem supaya memiliki solusi tunggal, memiliki banyak solusi, dan tidak memiliki solusi!

- 8.
- | | | | | |
|-----|-----|---|-----|-----|
| | | | | 131 |
| | | | | 159 |
| | | | | 148 |
| | | | | 162 |
| 159 | 148 | ? | 134 | |

Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

9. Diketahui $\frac{xy}{x+y} = a$, $\frac{xz}{x+z} = b$ dan $\frac{yz}{y+z} = c$, dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $c \neq 0$. Tentukan nilai $x = \dots!$

10. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka tentukan nilai

$$\left[a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^2 = \dots!$$

11. Nilai-nilai a, b , dan c memenuhi persamaan-persamaan berikut

$$\frac{25ab}{a+b} = \frac{1}{2}, \frac{15bc}{b+c} = -1, \text{ dan } \frac{5ac}{a+c} = -\frac{1}{3}.$$

Hitunglah $(a - b)^c$.

12.



Trisna bersama dengan Ayah dan Kakek sedang memanen tomat di

ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika Ayah dan kakek menyelesaikan pekerjaan itu, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, Ayah, dan Kakek untuk menyelesaikan panen tersebut, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

13. Diberi dua bilangan. Bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Temukanlah bilangan tersebut.

14. Dengan menggunakan kertas berpetak, tentukanlah himpunan penyelesaian melalui grafik setiap sistem persamaan berikut ini!

i. $3x + 2y = 9$

$x + 3y = 10$

ii. $4x + y = 6$

$3x + 2y = 10$

4. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel



Masalah-3.11

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000 m². Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100 m² dan untuk membangun rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75 m². Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi maka:

- 1) bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun; dan
- 2) gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: x : banyak rumah tipe *A* yang akan dibangun

y : banyak rumah tipe *B* yang akan dibangun

- 1) Banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun

- a) Keterbatasan yang dimiliki Pak Rendi adalah:

Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe *A* dan tipe *B* di atas tanah seluas 10.000m² ditentukan oleh pertidaksamaan:

$100x + 75y \leq 10.000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:

$$4x + 3y \leq 400 \dots\dots\dots(1)$$

- b) Jumlah rumah yang akan dibangun, dibentuk oleh pertidaksamaan:

$$x + y \leq 125 \dots\dots\dots(2)$$

Dari kedua keterbatasan di atas (pertidaksamaan 1 dan pertidaksamaan 2), banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun, dihitung dengan menggunakan konsep sistem persamaan linear dua variabel seperti berikut.

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 400 \quad | \times 1 | \rightarrow 4x + 3y = 400 \\ x + y = 125 \quad | \times 3 | \rightarrow \underline{3x + 3y = 375} - \\ \hline x = 25 \end{array}$$

untuk $x = 25$, maka $y = 125 - x$
 $y = 125 - 25$
 $= 100$

Hal ini berarti: dengan keterbatasan yang ada, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe *A* sebanyak 25 unit, dan rumah tipe *B* sebanyak 100 unit.



Diskusi

Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan yang ada.

2) Grafik daerah penyelesaian pada diagram kartesius

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$.
jika $x = 0$, maka $y = 133,3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik $(0, 133,3)$ dan memotong sumbu x di titik $(100, 0)$.

Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$
jika $x = 0$ maka $y = 125$

Maka garis $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik $(0, 125)$ dan memotong sumbu x di titik $(125, 0)$.

Langkah 2

Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$. Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sebarang titik misal $P(x,y)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang

memuat titik $P(x,y)$ merupakan daerah penyelesaiannya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

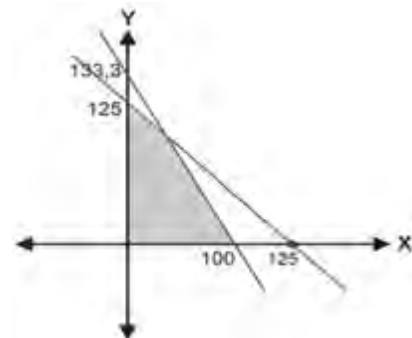
Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.

Apakah kita perlu membatasi nilai $x > 0$ dan nilai $y > 0$? Mengapa? Berikan penjelasanmu.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.

Dari Gambar 3.7, daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.



Gambar 3.7 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linier

Mempelajari sistem pertidaksamaan linear dua variabel berguna untuk menentukan nilai maksimum suatu fungsi dengan domain suatu himpunan tertentu. Perhatikan contoh berikut!

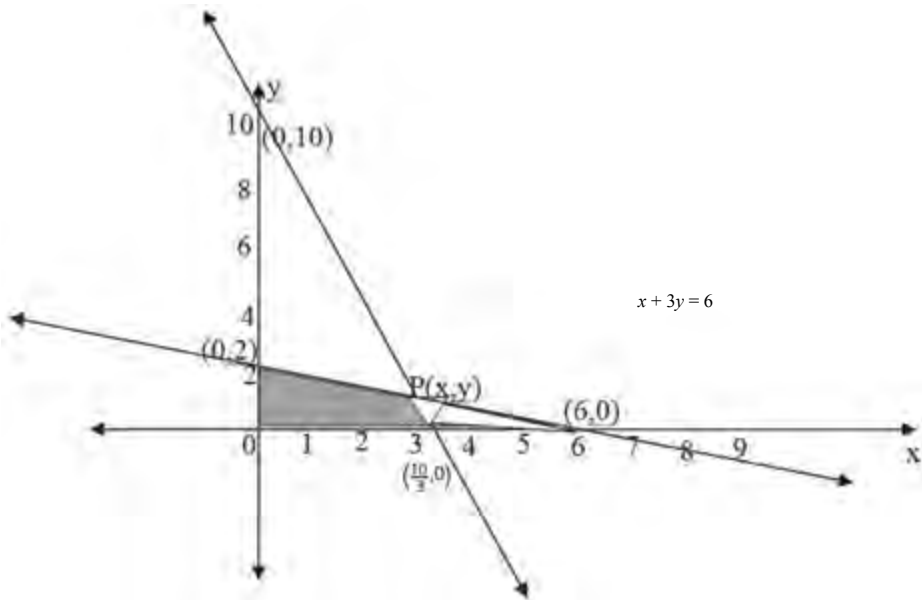
Contoh 3.5

Jika nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ pada himpunan $A = \{x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6, 3x + y \leq a\}$ adalah 4, maka nilai $a = \dots$?

Penyelesaian

Misalkan $f(x,y) = x + y$
 Pertidaksamaan-1: $x + 3y \leq 6$
 Pertidaksamaan-2: $3x + y \leq a, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$.

- ◆ Coba gambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaan $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$ dan daerah fungsi f yang dibatasi kedua pertidaksamaan yang diketahui pada soal.



Gambar 3.8 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear $x + 3y \leq 6$, $3x + y \leq a$

Mengingat gradien dari $f(x,y) = x + y$ adalah $m = -1$, maka f akan mencapai maksimum di titik P . Titik P adalah perpotongan dari garis $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$. Jadi diperoleh

$$x_P = \frac{3a - 6}{8} \quad \text{dan} \quad y_P = \frac{18 - a}{8}.$$

Karena nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4, maka

$$\frac{3a - 6}{8} + \frac{18 - a}{8} = 4 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

Dengan demikian, agar nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4 maka nilai $a = 10$. Berdasarkan masalah dan contoh di atas, mari kita tetapkan konsep sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.



Definisi 3.9

1. Sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan pertidaksamaan linear yang saling terkait dengan koefisien variabelnya bilangan-bilangan real.
2. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.



Definisi 3.10

Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan semua pasangan titik (x,y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.



Definisi 3.11

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.



Uji Kompetensi 3.4

- Diberikan sistem pertidaksamaan linier:
 $x - y \geq 3$
 $5x + 3y \geq 9$
 - Gambarkan grafik pertidaksamaan pada sistem tersebut!
 - Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem tersebut, dengan syarat tambahan $x > 0$ dan $y < 0$!
 - Selanjutnya dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian sistem tersebut untuk syarat $x < 0$ dan $y > 0$? Jelaskan!
- Misalkan padalah jumlah maksimum dari himpunan penyelesaian yang memenuhi sistem di bawah ini.
 $2x + 5y \leq 600$
 $4x + 3y \leq 530$
 $2x + y \leq 240$
 - Gambarkanlah pertidaksamaan sistem linear tersebut!
 - Tentukanlah nilai p !
- Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan

petani dari 1 kuintal padi adalah Rp32.000,00 sedang dari 1 kuintal jagung Rp20.000,00 dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

3. Jika diberikan sistem pertidaksamaan linear seperti berikut ini,

$$a_1x + b_1y \geq c_1 \text{ dan } x \geq 0$$

$$a_2x + b_2y \geq c_2 \text{ dan } y \geq 0.$$

- a) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem memiliki solusi tunggal?
 b) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem tidak memiliki solusi?

4. Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Masing-masing memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 3.1. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp200,00 dan Fluon Rp300,00 per kapsul, berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Unsur	Perkapsul	
	Fluin	Fluon
Aspirin	2	1
Bikarbonat	5	8
Kodein	1	6



Projek

Bersama temanmu amati permasalahan di sekitarmu atau dari sumber lain (buku, internet, dan lain-lain) yang dapat dinyatakan dalam sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Formulasikan masalah tersebut dengan mendefinisikan variabel-variabel terkait, mencari persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan hubungan antar variabel tersebut, selesaikan sistem yang kamu peroleh, dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan atas kegiatanmu ini dan paparkan hasilnya di depan kelas.

D. PENUTUP

Berberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari seringkali menjadi sebuah model sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linier. Konsep sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan ini didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan dalam sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.
2. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah himpunan semua nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut.
3. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstantanya adalah nol dan salah satu dari dua hal berikut dipenuhi.
 - a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
 - b. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyaknya anggota himpunan penyelesaian yang tak trivial sebagai tambahan penyelesaian trivial.
4. Apabila penyelesaian sebuah sistem persamaan linear semuanya nilai variabelnya adalah nol, maka penyelesaian tersebut dikatakan penyelesaian trivial. Misal diberikan sistem persamaan linear $3x + 5y + z = 0$ dan $2x + 7y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstanta adalah nol dan mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$.
5. Apabila sebuah sistem persamaan linear mempunyai anggota himpunan penyelesaiannya dari nilai variabel yang tidak semuanya nol disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
6. Secara tafsiran geometri dari selesaian suatu sistem persamaan linear, diberikan sistem persamaan dengan 2 persamaan dan 2 variabel, sebagai berikut.
 $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$, dengan $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ anggota bilangan real, dengan a_1 dan a_2 tidak keduanya nol dan b_1 dan b_2 tidak keduanya nol.
Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis, misal garis g_1 dan garis g_2 . Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut, maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis g_1 dan garis g_2 . Berdasarkan hal itu, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu
 - (a) garis g_1 dan garis g_2 sejajar dan tidak berpotongan, yaitu jika tidak terdapat titik perpotongan sehingga sistem tidak mempunyai penyelesaian.

- (b) garis g_1 dan garis g_2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai tepat satu (tunggal) penyelesaian.
 - (c) garis g_1 dan garis g_2 berimpit, artinya terdapat tak terhingga banyak titik perpotongan. Dalam hal ini sistem mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.
7. Sistem Persamaan linear (*SPL*) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai satu penyelesaian dan mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear adalah prasyarat mutlak mempelajari bahasan matriks dan program linear. Matriks adalah bentuk lain sebuah sistem persamaan linear, artinya setiap sistem persamaan linear dapat disajikan dalam bentuk matriks. Kita akan menemukan konsep dan sifat-sifat matriks melalui penyelesaian masalah nyata. Selanjutnya kita lakukan operasi hitung pada dua atau lebih matriks dan menentukan determinannya. Sifat-sifat matriks terhadap operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

Bab 4

Matriks

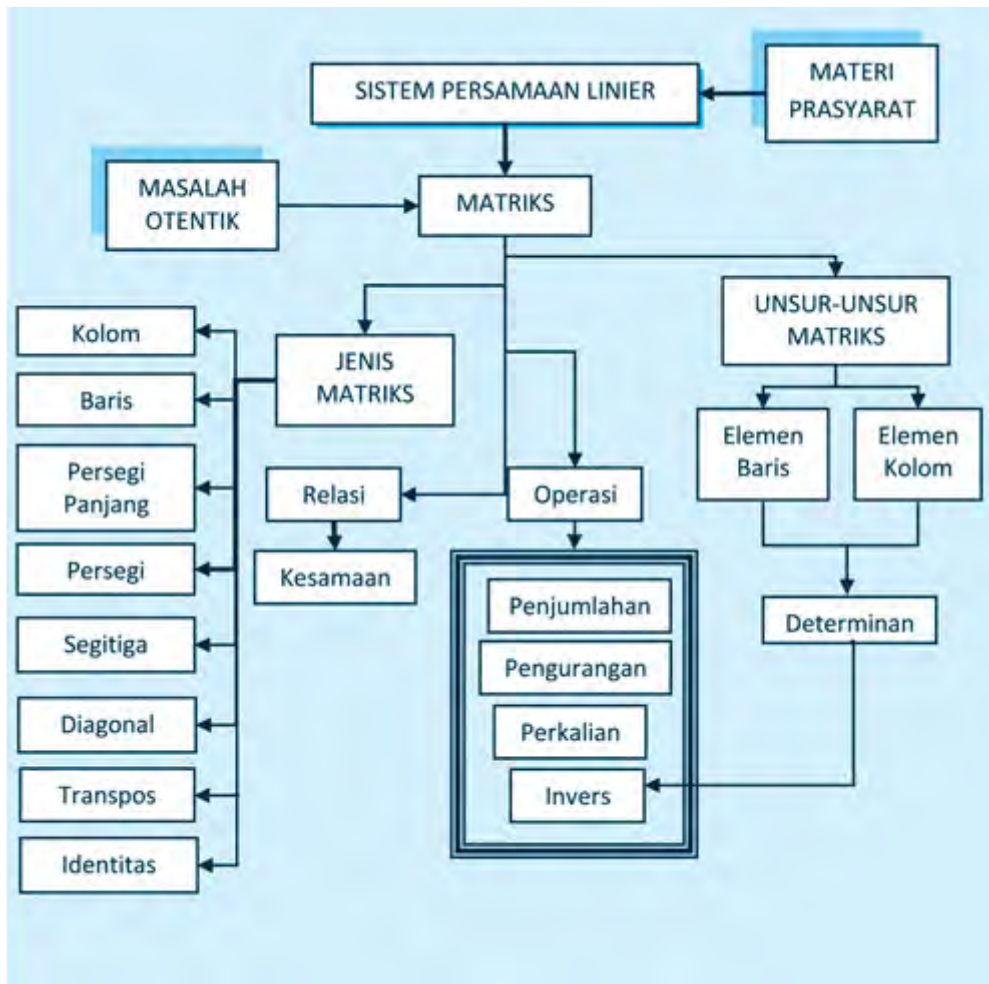
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari.2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis;3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dalam kehidupan sehari-hari;4. memahami konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata;5. memahami operasi sederhana matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.	<p>Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• melatih berpikir kritis dan kreatif;• mengamati keteraturan data;• berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah;• berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka;• mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Elemen Matriks*
- *Ordo Matriks*
- *Matriks Persegi*
- *Matriks Identitas*
- *Transpos Matriks*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Matriks

Informasi yang terdapat dalam suatu koran atau majalah tidak senantiasa berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf, tetapi ada kalanya disampaikan dalam bentuk sebuah tabel. Tampilan informasi dalam suatu tabel lebih tersusun baik dibandingkan dalam bentuk paragraf. Hal seperti ini sering kita temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen akhir Liga Super Indonesia, data perolehan nilai dan absensi siswa, maupun brosur harga jual sepeda motor.

Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, mari kita cermati uraian berikut ini. Diketahui data hasil penjualan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya, dari sebuah agen tiket, selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1: Keterangan situasi tiket penerbangan ke Medan dan Surabaya

Tujuan	Hari ke			
	I	II	III	IV
Medan	3	4	2	5
Surabaya	7	1	3	2

Pada saat kamu membaca tabel di atas maka hal pertama yang kamu perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk tiap-tiap kota setiap harinya. Data tersebut, dapat kamu sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat kamu lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Berikut ini akan kita cermati lebih dalam lagi mengenai matriks dari masalah-masalah kehidupan kita sehari-hari.



Masalah-4.1

Masihkah kamu ingat posisi duduk sewaktu kamu mengikuti Ujian Nasional SMP? Maksimal siswa dalam satu ruang ujian hanya 20 peserta, biasanya disusun dalam lima baris, empat kolom, seperti yang disajikan pada Gambar 4.1.

Untuk memudahkan pengaturan peserta ujian dalam suatu ruangan, pihak sekolah menempatkan siswa dalam ruang ujian dengan pola nomor ujian melalui



Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Nomor Induk Siswa (NIS), yang ditempelkan di tempat duduk siswa. Misalnya, nomor ujian peserta di ruang A adalah NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, NIS siswa-22, NIS siswa-23,... , NIS siswa-44, NIS siswa-51, NIS siswa-52, NIS siswa-53, NIS siswa-54. Jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-12, itu berarti posisi peserta saat ujian berada pada baris ke-1 lajur ke-2, dan jika nomor ujian peserta adalah NIS siswa-34, artinya posisi peserta tersebut saat ujian berada pada baris ke-3 kolom ke-4. Demikian pula, jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-51, artinya posisi siswa saat ujian berada pada baris ke-5 kolom ke-1. Tentunya, untuk setiap peserta ujian yang memiliki nomor ujian NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, ..., NIS siswa-53, dan NIS siswa-54 dengan mudah memahami posisi mereka dalam ruang ujian tersebut. Tentukan susunan peserta ujian ditinjau dari pola Nomor Induk Siswa (NIS)!

Alternatif Penyelesaian

Susunan peserta ujian jika dilihat dari NIS, dalam bentuk baris dan kolom, dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Meja Pengawas Ujian			
NIS 11	NIS 12	NIS 13	NIS 14
NIS 21	NIS 22	NIS 23	NIS 24
NIS 31	NIS 32	NIS 33	NIS 34
NIS 41	NIS 42	NIS 43	NIS 44
NIS 51	NIS 52	NIS 53	NIS 54

Gambar 4.2. Denah posisi tempat duduk peserta ujian berdasarkan NIS

Masalah-4.2

Masalah lain yang terkait dengan susunan dapat kita amati susunan barang-barang pada suatu supermarket. Tentunya, setiap manager supermarket memiliki aturan untuk menempatkan setiap koleksi barang yang tersedia. Coba kita perhatikan gambar berikut ini!

KOLEKSI Peralatan Dapur	KOLEKSI Roti dan Biskuit	KOLEKSI Permen dan Coklat	KOLEKSI Mie Instan
KOLEKSI Sabun	KOLEKSI Sampho dan Pasta Gigi	KOLEKSI Detergen dan Pembersih	KOLEKSI Bumbu Dapur
KOLEKSI Minuman Botol	KOLEKSI Beras dan Tepung	KOLEKSI Susu	KOLEKSI Minyak dan Gula

Gambar 4.3 Ruang koleksi barang-barang pada suatu supermarket

Tentukanlah posisi koleksi beras dan tepung pada susunan di atas!

Alternatif Penyelesaian

Gambar di atas mendeskripsikan ruangan koleksi barang-barang suatu supermarket, yang terdiri atas tiga baris, 4 kolom. Koleksi beras dan tepung terdapat pada baris ke-3, kolom ke-2. Koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-4 adalah koleksi bumbu dapur.

- ◆ Coba kamu sebutkan posisi baris dan kolom setiap koleksi barang yang lain!
- ◆ Seandainya susunan koleksi barang-barang tersebut juga tersusun bertingkat, bagaimana matriks yang terbentuk?

Masalah-4.3

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Bogor	126 km	Bandung–Semarang	367 km
Bandung–Cirebon	130 km	Bandung–Yogyakarta	428 km
Bandung–Surabaya	675 km	Bogor–Cirebon	256 km

Bogor–Surabaya	801 km	Cirebon–Yogyakarta	317 km
Bogor–Semarang	493 km	Surabaya–Semarang	308 km
Bogor–Yogyakarta	554 km	Surabaya–Yogyakarta	327 km
Cirebon–Surabaya	545 km	Semarang–Yogyakarta	115 km
Cirebon–Semarang	237 km		

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak-jarak antar kota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	125	256	493	554	801	0

Dari tampilan di atas, dia cukup jelas mengetahui jarak antar kota tujuan wisata. Jika kita ingin menampilkan susunan jarak-jarak tersebut, dapat dituliskan sebagai berikut.

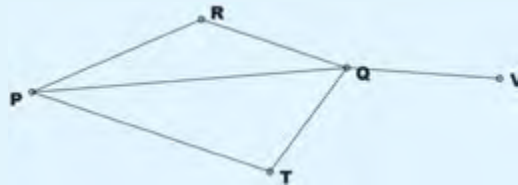
$$\begin{bmatrix} 0 & 130 & 367 & 428 & 675 & 126 \\ 130 & 0 & 237 & 317 & 545 & 256 \\ 367 & 237 & 0 & 115 & 308 & 493 \\ 428 & 317 & 115 & 0 & 327 & 554 \\ 675 & 545 & 308 & 437 & 0 & 801 \\ 126 & 256 & 493 & 554 & 801 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antar kota di pulau Jawa ini, terdiri dari 6 baris dan 6 kolom.



Masalah-4.4

Pak Margono yang tinggal di kota P memiliki usaha jasa pengiriman barang. Suatu ketika, perusahaan pak Margono menerima order mengirim barang ke kota V . Jika setiap dua kota yang terhubungkan diberi bobot 1, sedangkan dua kota yang tidak terhubungkan diberi bobot 0. Nyatakanlah persoalan pengiriman barang tersebut dalam bentuk matriks.



Gambar 4.4 Diagram rute pengiriman barang

Alternatif Penyelesaian

Kata kunci pada persoalan ini adalah keterhubungan antar dua kota, secara matematis, fungsi keterhubungan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i = j \\ 1, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dari gambar di atas, kota P terhubung dengan semua kota, kecuali ke kota V . Keterhubungan antar dua kota ini, dapat kita nyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

- ◆ Coba temukan lintasan mana yang terpendek untuk membawa barang dari kota P ke kota V !

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & R & Q & T & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ R \\ Q \\ T \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \text{Susunan angka-angka berbentuk persegi.}$$

Matriks representasi keterhubungan antar dua kota, disebut matriks X yang anggota-anggotanya terdiri dari angka 1 dan 0.

Dari empat masalah di atas, masalah yang dikaji adalah aturan susunan posisi setiap objek dan benda dinyatakan dalam aturan baris dan kolom. Banyak baris dan kolom dikondisikan pada kajian objek yang sedang diamati. Objek-objek yang disusun pada setiap baris dan kolom harus memiliki karakter yang sama.

Secara umum, matriks didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 4.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa “ () ” atau kurung siku “ [] ”.

Biasanya pelabelan suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A , B , C , D , ..., dan seterusnya. Secara umum, diberikan matriks A ,

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \rightarrow \text{baris ke-3} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{baris ke-}m \end{array}$$

\downarrow kolom ke-1 \downarrow kolom ke-2 \downarrow kolom ke-3 \downarrow kolom ke- n

a_{ij} bilangan real, menyatakan elemen matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j , $i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$A_{m \times n}$: m menyatakan banyak baris matriks A .
 n menyatakan banyak kolom matriks A .

Notasi $m \times n$, menyatakan ordo (ukuran) matriks A , yang menyatakan banyak baris dan kolom matriks A . Ingat, m menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom matriks A . Jadi, jika diperhatikan ordo suatu matriks, dapat diketahui banyaknya elemen-elemen pada matriks.



Masalah-4.5

Tentukanlah matriks 4×4 , $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $a_{ij} = i^{j-1}$!

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Matriks } A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \text{ nilai } a_{ij}, \text{ ditentukan dengan } a_{ij} = i^{j-1}.$$

- $a_{11} = 1^{1-1} = 1$
- $a_{12} = 1^{2-1} = 1$
- $a_{13} = 1^{3-1} = 1$
- $a_{14} = 1^{4-1} = 1$
- $a_{21} = 2^{1-1} = 1$
- $a_{22} = 2^{2-1} = 2$
- $a_{23} = 2^{3-1} = 4$
- $a_{24} = 2^{4-1} = 8$
- $a_{31} = 3^{1-1} = 1$
- $a_{32} = 3^{2-1} = 3$
- $a_{33} = 3^{3-1} = 9$
- $a_{34} = 3^{4-1} = 27$
- $a_{41} = 4^{1-1} = 1$
- $a_{42} = 4^{2-1} = 4$
- $a_{43} = 4^{3-1} = 16$
- $a_{44} = 4^{4-1} = 64$

Jadi, matriks A berordo 4×4 yang dimaksud adalah:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$



Contoh 4.1

Teguh, siswa kelas X SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2 \times 3}$ adalah matriks persegi panjang dengan berordo 2×3 .

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3 \times 2}$ adalah matriks berordo 3×2 .

Dapatkah kamu menciptakan susunan matriks, minimal dua cara dengan cara yang berbeda? Kamu perlu memikirkan cara lain yang lebih kreatif!

2. Jenis-Jenis Matriks

Contoh 4.1 di atas, menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini, $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

$T_{1 \times 2} = [46 \ 43]$, matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1 \times 4} = [22 \ 19 \ 14 \ 12]$, matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada kolom matriks tersebut. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1 , yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$$T_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}, \text{ matriks kolom berordo } 5 \times 1, \text{ yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.}$$

c. Matriks Persegipanjang

Matriks persegipanjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

$$T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}, \text{ matriks persegipanjang berordo } 2 \times 3, \text{ yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh.}$$

$$T_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}, \text{ matriks persegipanjang berordo } 3 \times 2, \text{ yang merepresentasikan umur semua anggota keluarga Teguh.}$$

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$$T_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix}, \text{ matriks persegi berordo } 2 \times 2, \text{ yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.}$$

Jika kita meninjau matriks persegi berordo 4×4 di bawah ini.

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

→ Diagonal Samping matriks H

→ Diagonal Utama matriks H

Diagonal utama suatu matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F dan G berordo 4×4 . Jika terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

maka matriks persegi yang berpola seperti matriks F dan G disebut matriks segitiga.

Jadi, matriks segitiga merupakan suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dengan elemen-elemen matriks di bawah atau di atas diagonal utama semuanya nol.

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi, seperti matriks berikut ini.

$$\odot Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\odot B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks persegi dengan pola “semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama tidak semuanya bernilai nol”, disebut matriks diagonal.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

$$\bullet I_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika suatu matriks persegi unsur diagonal utamanya adalah 1 dan unsur yang lainnya semua nol disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

h. Matriks Nol

Jika elemen suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

$$\bullet Q_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$\bullet Q_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$\bullet Q_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0], \text{ maka disebut matriks nol.}$$

3. Transpos Matriks

Pak Susilo, pensiunan PLN, memiliki banyak koleksi buku, majalah, dan novel yang pernah dia beli maupun terima selama dia masih aktif sebagai pegawai PLN. Karena begitu banyak koleksi buku tersebut, ditambah lagi ruang koleksinya tidak memadai, Pak Susilo berniat akan menghibahkan semua buku-buku tersebut ke kampung halamannya, yaitu di Tegal. Sebelum ke mobil dibawa Parman, cucunya, membantu menyusun buku-buku tersebut dalam tumpukan-tumpukan seperti pada gambar di bawah ini.

Ruang Baca



Gambar 4.5. Diagram susunan koleksi buku-buku

Jika direpresentasikan semua koleksi tersebut dalam matriks, dengan sudut pandang dari ruang baca, akan diperoleh matriks persegi panjang berordo 3×6 . Kita sebut matriks B ,

$$B_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} BKo & MS & MT & BMo & BMa & BF \\ BKi & NP & MF & BR & BB & BI \\ KK & MI & BP & BS & BA & MF \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, karena halaman rumah Pak Susilo yang tidak cukup untuk ruang gerak truk sehingga truk harus diparkir di sebelah Barat ruang baca Pak Susilo. Pihak pengangkutan menyusun semua koleksi tersebut menurut barisan buku yang terdekat ke truk. Matriks B , berubah menjadi:

$$B_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} BKo & BKi & KK \\ MS & NP & MI \\ MT & MF & BP \\ BMo & BR & BS \\ BMa & BB & BA \\ BF & BI & MF \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kedua matriks $B_{3 \times 6}$ dan $B_{6 \times 3}$, dalam kajian yang sama, ternyata memiliki relasi. Relasi yang dimaksud dalam hal ini adalah “perubahan posisi elemen matriks”, atau disebut transpos matriks, yang diberi simbol B^t sebagai

transpos matriks B . Namun beberapa buku menotasikan transpos matriks \bar{B} dengan atau B' .

Perubahan yang dimaksud dalam hal ini adalah, setiap elemen baris ke-1 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-1 pada matriks B' , setiap elemen baris ke-2 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-2 pada matriks B' , demikian seterusnya, hingga semua elemen baris pada matriks matriks B menjadi elemen kolom pada matriks B' . Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpos matriks suatu matriks.

Contoh 4.2

a. Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks S , adalah

$$S' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 5 & 15 & 9 \\ 7 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

b. Jika $A = [-3 \ 4 \ 6 \ 8 \ 19]$, maka $A' = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

c. Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$, maka $C' = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

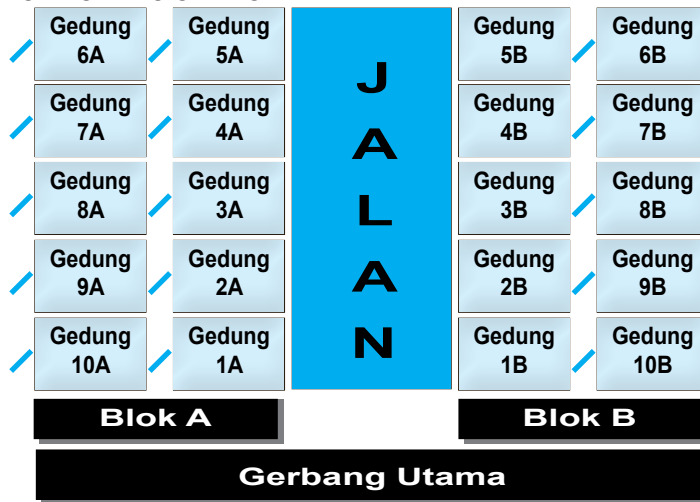
Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transpos matriks berordo $n \times m$.

Coba kamu pikirkan...

- Mungkinkah suatu matriks sama dengan transposnya? Berikan alasanmu!
- Periksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, untuk setiap matriks A dan B berordo $m \times n$?

4. Kemandirian Dua Matriks

Pada suatu kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangun yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.



Gambar 4.6 Denah kompleks ruko

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok A sama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok A sama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok A dan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Dari ilustrasi di atas, kita akan mengkaji dalam konteks matriks. Dua matriks dikatakan sama jika memenuhi sifat berikut ini.



Definisi 4.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

- Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B .
- Setiap elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).



Contoh 4.3

Tentukanlah nilai a , b , c , dan d yang memenuhi matriks $P^t = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian

Karena P merupakan matriks berordo 3×2 , maka P^t merupakan matriks berordo 2×3 . Sedangkan matriks Q merupakan matriks berordo 2×3 . Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks $P^t = Q$.

Dengan $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $P^t = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a , b , c , dan d sebagai berikut:

- $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.
- $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.
- Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.



Uji Kompetensi 4.1

1. Diketahui matriks $M = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

dan $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks M dan N ,

tentukanlah :

- Elemen baris ke-1 kolom ke-3 pada matriks M !
 - Elemen kolom ke-1 baris ke-5 pada matriks N !
 - Hasil perkalian elemen baris ke-2 pada matriks N dengan elemen kolom ke-4 pada matriks M !
 - Selisih elemen baris ke-6 pada matriks N terhadap elemen kolom ke-2 pada matriks M !
 - Elemen baris ke-7 pada matriks N . Silahkan jelaskan!
- Menurut kamu, apakah ada batasan banyak baris dan kolom untuk membentuk suatu matriks? Jelaskan!
 - Coba berikan contoh yang lain (selain yang disajikan di atas) mengenai matriks yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari!
 - Menurut kamu, teknologi apakah yang menggunakan konsep matriks yang sedang kita pelajari ini? Tolong deskripsikan!

5. Buatlah matriks yang terdiri dari 5 baris dan 3 kolom, dengan semua elemennya adalah 15 bilangan prima yang pertama. Tentukan transpos matriksnya!
6. Jika elemen suatu matriks merupakan anggota bilangan kuadrat, buatlah matriks yang terdiri dari 7 baris dan 2 kolom! Tentukan transpos matriksnya!
7. Tentukanlah matriks berordo 5×5 , dengan aturan:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i - j > 1 \\ -1 & \text{jika } i - j \leq 1 \end{cases}$$

8. Menurut ilmu kedokteran, dikatakan bahwa terdapat relasi antara berat badan dengan tinggi badan seseorang. Bisakah kamu merepresentasikan persoalan tersebut ke dalam matriks? (Silahkan gunakan data berat badan dan tinggi badan teman sekelasmu)!
9. Jelaskan nilai kebenaran untuk setiap pernyataan berikut ini!
 - a. Dua matriks yang berordo sama merupakan syarat perlu bagi dua matriks yang sama.
 - b. Dua matriks yang sama merupakan syarat cukup bagi dua matriks yang sama.

Petunjuk: Jika kamu belum paham arti syarat cukup dan syarat perlu, silahkan tanyakan pada gurumu!
10. Masalah Penugasan Pengasuh Bayi. Sebuah biro jasa penyedia pengasuh bayi mempunyai empat klien

dan lima pengasuh. Biro tersebut mengevaluasi tingkat kecocokan antara klien dan pengasuh bayi dalam sebuah tabel dengan skala nol sampai sepuluh; nilai nol artinya klien tidak cocok dengan pengasuh bayi dan nilai sepuluh untuk klien yang sangat cocok dengan pengasuh. Tabel peringkat tersebut sebagai berikut!

		Nama Pengasuh Bayi				
		Tarsi	Inem	Wati	Nurlela	Marni
KLIEN	Ibu Ratna	7	4	7	3	10
	Ibu Santi	5	9	3	8	7
	Ibu Bonita	3	5	6	2	9
	Ibu Soimah	6	5	0	4	8

Bagaimanakah biro jasa tersebut menugaskan pengasuh-pengasuhnya agar dapat memaksimalkan jumlah angka kecocokan antara klien dengan pengasuh?

11. Untuk matriks-matriks berikut, tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}',$$

$$D = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

12. Diketahui matriks-matriks

$$T = \begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$R = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Tentukan transpos dari matriks T !
- Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai a, b, c, d, e , dan f !

13. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

dan matriks $X = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks A sama dengan matriks X ? Jelaskan!

14. Pada tahun ajaran baru, Anas mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buah buku Matematika dan 4 buah buku Biologi. Dia harus membayar sebesar Rp410.000,00. Pada saat yang bersamaan, Samad mewakili teman-teman yang lainnya membeli 10 buah buku Matematika dan 6 buah buku Biologi. Samad harus membayar Rp740.000,00 untuk semuanya.

Nyatakanlah persoalan tersebut dalam bentuk matriks dan selesaikanlah!



Projek

Temukan contoh penerapan matriks dalam ilmu komputer, bidang ilmu fisika, kimia, dan teknologi informasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku matematika, fisika, biologi, kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku matematika, tersedia buku aljabar, geometri, statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom sebuah matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk mendapatkannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah

a. Operasi Hitung pada Matriks

1) Penjumlahan Dua Matriks

Untuk memudahkan kita memahami penjumlahan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.



Masalah-4.6

Sebuah perusahaan garmen memiliki dua pabrik yang berlokasi di Jakarta dan Surabaya. Perusahaan itu memproduksi dua jenis produk, yaitu baju dan jas. Biaya untuk bahan ditangani oleh sebuah departemen dan upah buruh ditangani oleh pabrik departemen lainnya. Biaya untuk setiap jenis produk diberikan pada matriks berikut.

**Pabrik di Surabaya
(dalam Jutaan)**

	Baju	Jas
Bahan	200	600
Buruh	20	80

**Pabrik di Jakarta
(dalam Jutaan)**

	Baju	Jas
Bahan	125	450
Buruh	25	90

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Surabaya, sebagai matriks S dan biaya matriks di Jakarta sebagai matriks J , maka biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk kedua pabrik tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

- ◆ Total biaya bahan untuk baju = $200 + 125 = 325$
- ◆ Total biaya bahan untuk jas = $600 + 450 = 1050$
- ◆ Total biaya buruh untuk baju = $20 + 25 = 45$
- ◆ Total biaya buruh untuk jas = $80 + 90 = 170$

Jika keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks, adalah sebagai berikut:

**Total Biaya Pabrik
(dalam Jutaan)**

	Baju	Jas
Bahan	325	1050
Buruh	45	170

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan diakibatkan kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2 . Seandainya ordo kedua matriks

biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.



Definisi 4.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij} . Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B , ditulis $C = A + B$, matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{untuk semua } i \text{ dan } j).$$

Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks adalah sama dengan memiliki ordo yang sama dengan matriks yang dijumlahkan.



Contoh 4.4

- a) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

- b) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, maka mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$.

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3×3 , karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3×3 juga.

$$\circlearrowleft T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

$$\circ O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks tidak nol yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas, I .

2) Pengurangan Dua Matriks

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B .

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks $-B$, ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Matriks $-B$ dalam merupakan matriks yang elemennya berlawanan dengan setiap elemen yang bersesuaian matriks B .



Contoh 4.5

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a) Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks-matriks X , Y , dan Z sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini:

- i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$.

Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2 . Sedangkan matriks Z berordo 3×2 . Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.



Diskusi

Operasi penjumlahan dikatakan bersifat komutatif jika $a + b = b + a$, untuk setiap a, b bilangan real.

- Dalam kajian matriks, apakah $A + B = B + A$?
- Bagaimana dengan operasi pengurangan dua matriks? Apakah $A - B = B - A$? Silahkan diskusikan!

3) Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan semua elemen matriks B . Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai:

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.



Definisi 4.4

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A , dinotasikan: $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j).$$



Contoh 4.6

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2H = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka $\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 12 & \frac{1}{3} \times 30 & \frac{1}{3} \times 15 \\ \frac{1}{3} \times 0 & \frac{1}{3} \times 24 & \frac{1}{3} \times 18 \\ \frac{1}{3} \times 3 & \frac{1}{3} \times (-3) & \frac{1}{3} \times (-12) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika $M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 12 & \frac{1}{4} \times 24 & \frac{1}{4} \times 36 \\ \frac{1}{4} \times 48 & \frac{1}{4} \times 60 & \frac{1}{4} \times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \times 12 & \frac{3}{4} \times 24 & \frac{3}{4} \times 36 \\ \frac{3}{4} \times 48 & \frac{3}{4} \times 60 & \frac{3}{4} \times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M.$$



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok masalah berikut.

M suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} , p dan q adalah bilangan real. Jika $C = (p + q) \times M$, maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = (p + q)a_{ij}$ untuk setiap i dan j . Sehingga $(p + q)M = p \times M + q \times M$.

- d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $c = -1$, maka

$$c \times (P - Q) = -1 \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \right) = -1 \times \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok bahwa jika matriks P dan Q merupakan dua matriks berordo sama, dan c adalah bilangan real, maka $c \times (P - Q) = c \times P - c \times Q$. Tentunya hasil $c \times (P - Q)$ sama dengan $c \times P - c \times Q$. Untuk matriks P dan Q berordo $m \times n$, dan c suatu skalar, c bilangan real. Silahkan diskusikan bahwa $c \times (P + Q) = c \times P + c \times Q$.

- e) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ dan $p = 2$ dan $q = \frac{1}{2}$.

Kita dapat memahami bahwa:

$$q \times L = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan hasil p dengan q , maka kita akan peroleh:

$$p \times (q \times L) = 2 \times \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L , merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p \times (q \times L)$.

Sekarang, untuk matriks M berordo $m \times n$, p dan q adalah skalar anggota Himpunan Bilangan Real, tunjukkan bahwa: $p \times (q \times L) = (p \times q)L$.

4) Perkalian Dua Matriks



Masalah-4.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu handphone, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)		
Cabang 1	7	8	3	Harga Handphone (jutaan)	2
Cabang 2	5	6	2	Harga Komputer (jutaan)	5
Cabang 3	4	5	2	Harga Sepeda Motor (jutaan)	15

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan, matriks $C_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan jumlah unit

setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

- Cabang 1
 Total biaya = (7 unit handphone \times 2 juta) + (8 unit komputer \times 5 juta) + (3 unit sepeda motor \times 15 juta).
 = Rp99.000.000,00
- Cabang 2
 Total biaya = (5 unit handphone \times 2 juta) + (6 unit komputer \times 5 juta) + (2 unit sepeda motor \times 15 juta)
 = Rp70.000.000,00
- Cabang 3
 Total biaya = (4 unit handphone \times 2 juta) + (5 unit komputer \times 5 juta) + (2 unit komputer \times 5 juta)
 = Rp43.000.000,00

Jadi, total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut:

$$R_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 99.000.000 \\ 70.000.000 \\ 43.000.000 \end{bmatrix}.$$

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks D . Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks D , maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D .

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{n \times m}$ dan matriks $B_{p \times n}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom B . Hasil perkalian matriks A berordo $n \times m$ terhadap matriks B berordo $p \times n$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } B_{n \times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m \times n}$ terhadap matriks $B_{n \times p}$, dinotasikan $C = A \times B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke- i dan kolom ke- j , dinotasikan c_{ij} , diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke- i dari matriks A terhadap elemen kolom ke- j dari matriks B , kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!



Contoh 4.7

a) Diketahui matriks $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan $B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B ,

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sekarang, silahkan tentukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A . Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dengan meng-

gunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0 \\ 3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0 \\ 5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a), silahkan

periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$?
Berikan penjelasanmu!



Contoh 4.8

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukanlah A^{2013} !

Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 \times I = -I$$

Jika $A^2 = -I$, maka $A^4 = I$. Artinya, untuk setiap pangkat matriks A kelipatan 2, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$2013 = 4 \cdot (503) + 1.$$

Akibatnya,

$$A^{2013} = A^{(4 \cdot (503) + 1)} = (A^4)^{503} \cdot A^1.$$

Matriks $A^4 = I$, dan $I^n = I$, $n = 1, 2, 3, \dots$, akibatnya berlaku, $(A^4)^{503} = I$.

Oleh karena itu,

$$A^{2013} = I \times A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanyaan Kritis

- Syarat apakah yang harus dipenuhi untuk memenuhi cara seperti di atas?
- Apakah $A^4 = 1$ berlaku untuk sembarang matriks persegi berordo 2×2 ?



Uji Kompetensi 4.2

- Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo 4×5 dan misalkan, C , D , dan E berturut-turut adalah matriks-matriks berordo 5×2 , 4×2 , dan 5×4 . Tentukanlah yang mana antara pernyataan matriks di bawah ini yang terdefinisi. Jika ada tentukanlah ukuran matriks tersebut!
 - BA
 - $AC + D$
 - $AE + B$
 - $AB + B$
 - $E(A + B)$
 - $E(AC)$
- Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!
- Apa yang dapat kamu jelaskan dengan operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks $A \cdot X = B$, dengan matriks A dan B matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks X ? Tolong paparkan di depan kelas!
- Berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menerapkan konsep perkalian matriks! (Selain konteks persoalan yang sudah disajikan pada buku ini).
- Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & & \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}'$$

$$\text{dan } F = [2 \ 4 \ 6]'$$

Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

$$6. \text{ Jika } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan $A+X=B$. Tentukan matriks X !

7. Berikan beberapa matriks A dan B yang memenuhi kesamaan $(A+B)^t = A^t + B^t$!
8. Tunjukkan bahwa $A^r \cdot A^s = A^{(r+s)}$, untuk semua matriks A matriks persegi!
9. Tentukanlah nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini! Untuk setiap matriks A dan B adalah matriks persegi.
 - a) Jika elemen pada kolom ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen kolom ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
 - b) Jika elemen pada baris ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen baris ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
10. Tentukanlah nilai-nilai p, q, r , dan s pada persamaan matriks berikut!

$$5 \begin{bmatrix} r & a \\ p & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}.$$

11. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika $F(X, Y, Z)$ didefinisikan sebagai $F(X, Y, Z) = 4X - 2Y + Z$.

Tentukanlah

$F(A, B, C)$!

$F(2A, 3B, 2C)$!

12. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$,

dan lima matriks yang dapat dipilih untuk dikalikan dengan matriks G , yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = G^t, K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } L = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks yang manakah dapat dikalikan terhadap matriks G ? Kemudian tentukan hasilnya!

13. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
 - i. $(A+B)^2 = A^2 + B^2$
 - ii. $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

14. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka

tentukanlah $C^3 - 4C^2 + C - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3 .

15. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!

- a) $G = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $G^2 = I$

- b) $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $F^2 = xF + y.I$

I adalah matriks identitas berordo 2×2 .



Projek

Himpunlah minimal lima masalah di bidang ekonomi, transportasi, dan teknik yang melibatkan konsep dan operasi dua buah matriks atau lebih. Ujilah apakah berlaku berbagai sifat operasi matriks di dalam pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan paparkan di depan kelas.

6. Determinan dan Invers Matriks



Masalah-4.8

Pekan Raya Jakarta, biasanya diselenggarakan sekitar Juli setiap tahunnya. Acara ini menampilkan berbagai hal menarik tentang ibukota negara Indonesia, seperti pameran teknologi terbaru, kebudayaan Betawi, hasil industri kreatif, dan banyak hal lain yang perlu disaksikan.

Tahun 2012, keluarga Pak Tatang akan menghadiri kegiatan tersebut dengan membeli 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak seharga Rp 210.000,00. Dengan niat yang sama, keluarga Pak Asep membeli 2 tiket dewasa dan 3 tiket anak-anak seharga Rp 190.000,00,-

Berapakah total uang tiket yang akan dibayar oleh Pak Asep, jika dia harus menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak?

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Untuk menyederhanakan masalah di atas, kita misalkan

x : harga tiket dewasa

y : harga tiket anak-anak.

Oleh karena itu, persoalan di atas dinyatakan dalam persamaan linear dua peubah seperti berikut.

Banyak tiket yang dibeli Pak Tatang : $3x + 2y = 210.000$

Banyak tiket yang dibeli Pak Asep : $2x + 3y = 190.000$

Matriks yang merepresentasikan kedua persamaan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linear,



Diskusi

Menurut kamu, apakah semua sistem persamaan linear dua variabel memiliki penyelesaian? Silahkan diskusikan dengan temanmu.

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \times c_1 - b_1 \times c_2}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \times c_2 - a_2 \times c_1}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1}, a_1b_2 \neq a_2b_1 \dots\dots\dots (2)$$

- Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain *SPLDV*. Tentunya, kamu mampu menunjukkannya.

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$ disebut sebagai determinan matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ dinotasikan } \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ atau } \det.(A) = |A|, \text{ dengan matriks } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A.$$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{dengan } \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 210.000 & 2 \\ 190.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{630.000 - 380.000}{9 - 4} = \frac{250.000}{5} = 50.000.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 210.000 \\ 3 & 190.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{570.000 - 420.000}{9 - 4} = \frac{150.000}{5} = 30.000.$$

Jadi, harga tiket Pekan Raya Jakarta untuk orang dewasa adalah Rp 50.000,00 dan untuk anak-anak adalah Rp 30.000,00.

Karena Pak Asep ingin menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak, maka dia harus menambah uang tiket sebesar Rp 210.000,00. Total biaya tiket yang harus dibayar Pak Asep adalah Rp 400.000,00.

Cara II

Dengan menggunakan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

Kita misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$, akibatnya persamaan tersebut menjadi :

$A \cdot X = B$ (4)

Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada persamaan (4)?



Definisi 4.5

Misalkan A matriks berordo $n \times n$. Matriks A^{-1} adalah invers matriks A jika dan hanya jika $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

Misalkan A matriks persegi, berordo 2×2 , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Maka invers matriks A , dinotasikan A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{(a \times d - b \times c)} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \times d \neq b \times c.$$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ disebut adjoin matriks A , dinotasikan $Adjoin A$.

Salah satu sifat invers matrik adalah $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$ (karena $I \cdot X = X$) (5)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat $\det A \neq 0$, namun ada beberapa

teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.

Kembali ke persamaan matriks,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B.$$

Karena A adalah matriks tak singular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah kita lanjutkan menentukan matriks X .

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 250.000 \\ 150.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Diperoleh } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 50.000 \text{ dan } y = 30.000.$$

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara I. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.



Masalah-4.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat, yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftarkan jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A, seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat dari yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:

x : banyaknya pesawat Airbus 100

y : banyaknya pesawat Airbus 200

z : banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\begin{cases} 50x + 75y + 40z = 305 \\ 30x + 45y + 25z = 185 \\ 32x + 50y + 30z = 206 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular.

Ada beberapa cara untuk menentukan $\det A$, antara lain Metode Sarrus. Yaitu sebagai berikut:

Misalnya matriks $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka deteminan A adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Untuk matriks pada masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 25 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 30 & 32 & 50 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (50.45.30) + (75.25.32) + (40.30.50) - (32.45.40) - (50.25.50) - \\
 &\quad (30.30.75) \\
 &= -100.
 \end{aligned}$$

Analog dengan persamaan (3), kita dapat menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2.$$

Oleh karena itu, banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan: 3 unit
 banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan: 1 unit
 banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan: 2 unit.

- Analog dengan cara II untuk penyelesaian masalah Pembelian Tiket PRJ, cobalah kamu menyelesaikan masalah pengadaan pesawat ini dengan cara yang sama. Mintalah bimbingan dari gurumu.

Contoh 4.9

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan A, B , mari kita tentukan terlebih dahulu matriks $A.B$, yaitu:

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Jika matriks $A.B$ tersebut kita peroleh $\det(A.B) = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28$.

Sekarang akan kita bandingkan dengan nilai $|A| \cdot |B|$.

Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = 14$, dan jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\det(B) = -2$.

Nilai $\det(A) \cdot \det(B) = 14 \cdot (-2) = -28$.

Sedangkan bahwa $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B) = -28$.

Latihan 4.1

- 1) Selidiki apakah $|A.B.C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$ untuk setiap matriks-matriks A, B , dan C berordo $n \times n$.
- 2) Jika matriks A adalah matriks persegi berordo 2×2 , dan k adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks $k.A$.

Contoh 4.10

Sebuah matriks P berordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a, b, c, d \in R$.

Jika determinan P adalah α , dengan $\alpha \in R$. Tentukanlah determinan matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Penyelesaian

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinan matriks P adalah α , maka berlaku $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \alpha$.

Elemen matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P , yaitu:

q_{21} = hasil kali skalar \times terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{21} .

q_{22} = hasil kali skalar \times terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{22} .

Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P .

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris 1} \\ \rightarrow \text{baris 2} \end{array}$$

Elemen baris 1 matriks Q = elemen baris 1 matriks P . Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks Q menjadi elemen baris 2 matriks P .

q_{21} dapat dioperasikan menjadi:

$(q_{21})^* = s \cdot q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa + sa & xd - sb + sb \end{vmatrix}$$

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris 1}^* \\ \rightarrow \text{baris 2}^* \end{array}$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru

Matematika), maka $|Q| = x \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha$, $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \right)$.

Jadi $|Q| = x\alpha$.

Latihan 4.2

Misalkan P matriks berordo 3×3 , dengan $|P| = \alpha$ dan matriks Q berordo 3×3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas. Tentukan determinan matriks Q !



Uji Kompetensi 4.3

- Selidiki bahwa $\det(A^n) = (\det A)^n$, untuk setiap:
 - $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$
 - $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 3$
- Diketahui $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = -8$, tentukanlah:
 - $\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}!$
 - $\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}!$
- Tentukanlah z yang memenuhi persamaan berikut!

$$\begin{bmatrix} z & 5 & 7 \\ 0 & z+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{bmatrix} = 0$$
- Selidiki bahwa $\det(C+D) = \det(C) + \det(D)!$ Untuk setiap matrik C dan D merupakan matriks persegi.
- Jika matriks M adalah matriks berordo 2×2 , $|M| \neq 0$. Tentukan hubungan $|M|$ dengan $\det M^{-1}$. Coba kamu generalisasikan untuk matriks M berordo $n \times n!$
- Tentukanlah nilai z , yang memenuhi persamaan berikut ini!

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}$$
- Jika elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!
- Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!
 - $\det(2A) = 2 \cdot \det(A)$
 - $|A^2| = |A|^2$
 - $\det(I + A) = 1 + \det(A)$
 Untuk matriks A merupakan matriks persegi.
- Untuk matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$, dengan $PQ \neq QP$. Apakah $\det(PQ) = \det(QP)$? Jelaskan!
- Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan elemen kolom ke-1 semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!
- Masalah Nutrisi
Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira.

Setelah berkonsultasi dengan seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makanan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks G , dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks J .

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Sumber I} & \text{Sumber II} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Kalsium} \\ \text{Protein} \\ \text{Karbohidrat} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$J = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Biskuit A} & \text{Biskuit B} & \text{Biskuit C} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Sumber I} \\ \text{Sumber II} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B !
- Hitunglah $G \cdot J$ dan jelaskan arti dari setiap elemen matriks tersebut!

12. Masalah alokasi sumber daya.

Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata

dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp 400.000,00 per malam, transportasi ke tiap tempat wisata Rp 80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 90.000,00.

- Nyatakan matriks harga sewa hotel, transportasi dan makan.
- Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.
- Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
- Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

13. Masalah Persediaan Toko Cat.

Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persediaan tiga jenis cat eksterior, yaitu *regular*, *deluxe*, dan *commercial*. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R , sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Biru} & \text{Hitam} & \text{Kuning} & \text{Coklat} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Regular} \\ \text{Deluxe} \\ \text{Commercial} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Biru} & \text{Hitam} & \text{Kuning} & \text{Coklat} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Regular} \\ \text{Deluxe} \\ \text{Commercial} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Tentukan inventaris toko pada akhir minggu.

- b. Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks T . Tentukan inventaris toko yang baru.
14. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa $(B^{-1})^{-1} = B$ dan $[B^t]^{-1} = [B^{-1}]^t$!
15. Tentukanlah determinan dari matriks
- $$M = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$
16. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel.
- $$x + y = 3$$
- $$2x - y = 0$$
- Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.



Projek

Himpun minimal tiga permasalahan dalam bidang ekonomi, transportasi, dan matematika terkait penerapan konsep determinan dan *invers* matriks. Selidiki sifat *invers* matriks yang diterapkan pada pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks A ditransposkan menghasilkan matriks A' dengan elemen baris matriks A berubah menjadi elemen kolom matriks A' . Dengan demikian matriks A' ditransposkan kembali, hasilnya menjadi matriks A atau $(A')^t = A$.
3. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
4. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan asosiatif, misal jika A dan B adalah matriks, maka
 - a. $A + B = B + A$
 - b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
5. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen dari matriks semula.
6. Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom dari matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris dari matriks pengalinya.
7. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas perkalian, hasilnya adalah matriks A .
8. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks dengan skalar memenuhi sifat komutatif dan asosiatif. Misal jika k adalah skalar, A , dan B adalah matriks maka berlaku
 - a. $kA = Ak$
 - b. $k(A \pm B) = kA \pm kB$
9. Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B . Misal jika $A_{p \times q}$ dan $B_{q \times r}$ adalah dua buah matriks, maka berlaku $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$.
10. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

Selanjutnya kita akan bahas tentang relasi dan fungsi. Untuk mempelajari relasi dan fungsi, anda harus mempelajari ulang tentang konsep dan sifat-sifat himpunan, sebab semua relasi dan fungsi didefinisikan pada domainnya yang berupa himpunan. Demikian juga daerah kawan dan daerah hasil suatu relasi dan fungsi adalah suatu himpunan.

Bab 5

Relasi dan Fungsi

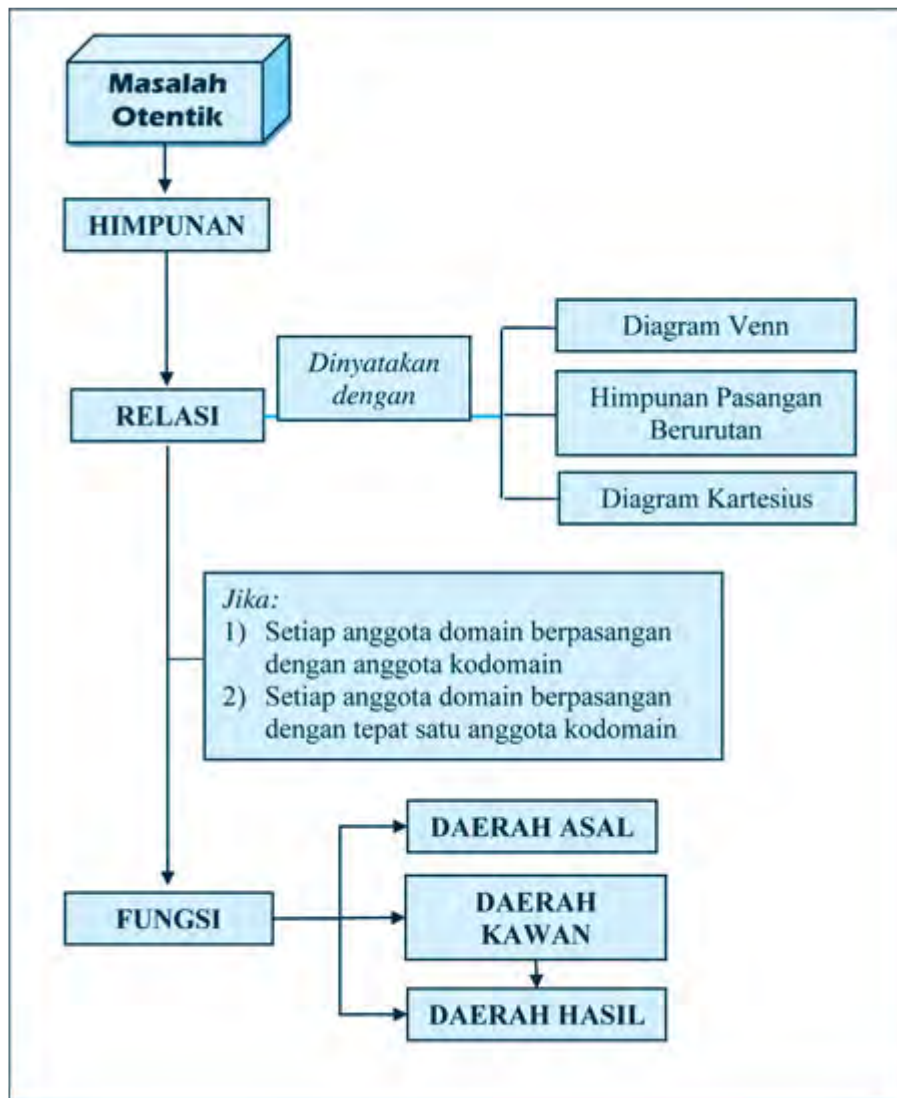
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. memahami daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik);3. mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi.	<p>Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik;• berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola instalasi sosial kultur;• berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik;• menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi;• menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn;• menuliskan sifat-sifat relasi;• menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya;• menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi;• menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn;• menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

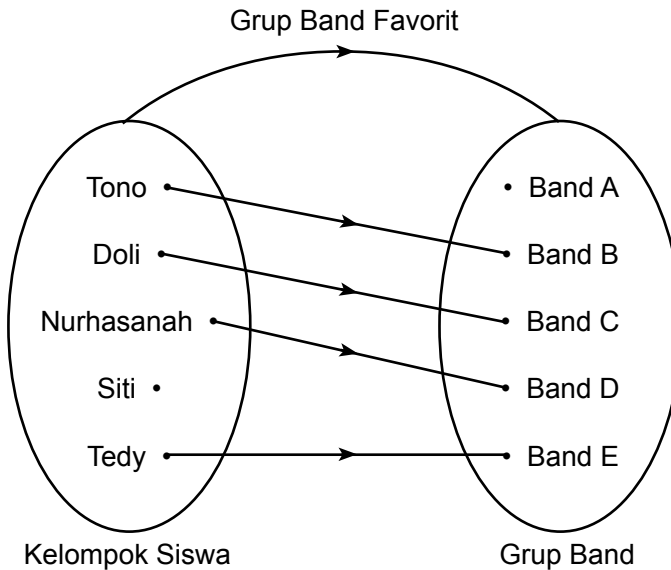
B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah merupakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.

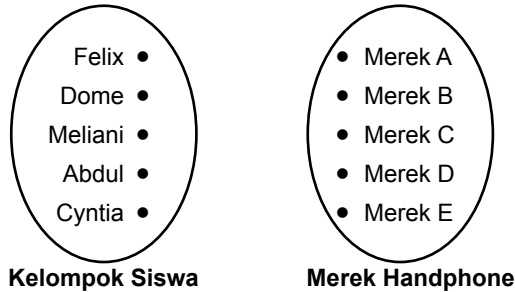


Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terperinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

- (1) Grup band favorit Tono adalah Band B.
 - (2) Grup band favorit Doli adalah Band C.
 - (3) Nurhasanah band favorit Tono adalah Band D.
 - (4) Grup band favorit Tedy adalah Band E.
 - (5) Siti tidak memiliki grup band favorit dari kelompok grup band yang diberikan.
 - (6) Tidak ada siswa yang grup band favoritnya Band A.
- Coba berdiskusi dengan temanmu, mengapa kita bisa menduga fakta-fakta yang kita temukan di atas?

Bandingkan dengan gambar berikut.



Gambar 5.2 Kelompok siswa dan merek handpone

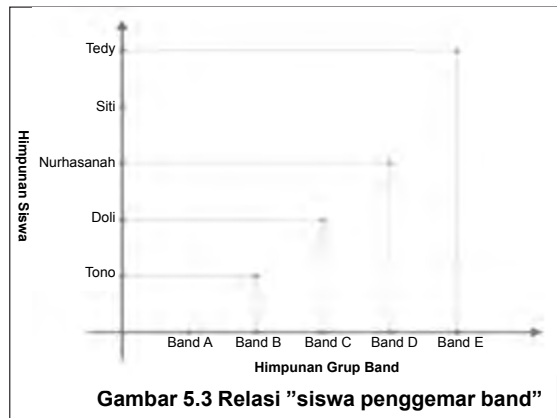
Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah ‘Grup band favorit’. Pada Gambar 5.2 tidak dapat ditemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis berpanah yang menghubungkan yang diberikan.

Aturan menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada Gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah ‘grup band favorit’. Relasi yang disajikan pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis berpanah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut dengan relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah, relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa dengan grup band favoritnya adalah: $\{(Tono, \text{Band B}), (Doli, \text{Band C}), (\text{Nurhasanah}, \text{Band D}), (Tedy, \text{Band E})\}$

Jika dinyatakan dengan diagram kartesius, ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 5.3 Relasi "siswa penggemar band"

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.



Masalah-5.1

Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 67 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar SMA untuk pertandingan sepak bola, bola volley, bulu tangkis, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 orang siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Abdullah, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Pasangkanlah siswa dengan pertandingan yang akan diikuti dengan ketentuan berikut.

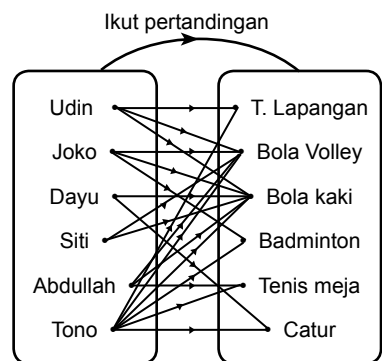
- 1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola volley, Joko ikut pertandingan badminton, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
- 2) Siti ikut pertandingan bola volley, Dayu ikut pertandingan catur, Joko ikut pertandingan badminton, Abdullah dan Tono ikut pertandingan bola volley.
- 3) Udin dan Dayu ikut pertandingan bola kaki, Joko ikut pertandingan badminton, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
- 4) Siti ikut pertandingan bola volley, Joko, Udin, dan Tono ikut pertandingan bola kaki, Tono ikut pertandingan catur.
- 5) Keenam siswa ikut pertandingan bola kaki.
- 6) Tono akan mengikuti seluruh pertandingan.

Alternatif Penyelesaian

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

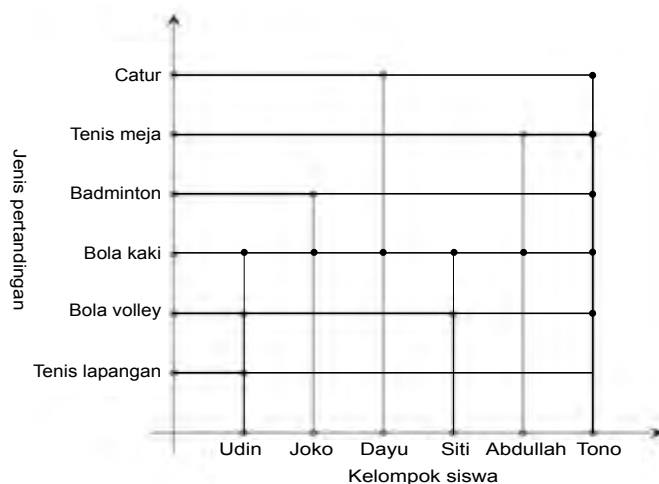
- 1) Udin ikut pertandingan bola kaki dan bola volley, Joko ikut pertandingan bulu tangkis, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.

- a) Dengan diagram panah
- b) Dengan himpunan pasangan berurutan
Himpunan pasangan berurutan: {(Udin, bola kaki), (Udin, bola volley), (Joko, badminton), (Dayu, catur), (Siti, bola volley), (Abdullah, tenis meja), (Tono, tenis meja)}



Gambar 5.4 Pasangan setiap siswa yang mengikuti pertandingan olahraga

c) Dengan diagram kartesius



Gambar 5.5 Deskripsi pasangan antara siswa dengan jenis pertandingan

- 2) Sebagai latihanmu, dengan cara yang sama dengan butir (1) silahkan kerjakan butir (2) sampai butir (6).

Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.



Definisi 5.1

Misalkan A dan B adalah himpunan. Relasi dari A ke B adalah aturan pengaitan/pemasangan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B .

Catatan:

- 1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua buah atau lebih himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan, dan himpunan kedua yaitu himpunan olah raga yang akan dipertandingkan.
- 2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada kegiatan-1 yaitu himpunan siswa disebut dengan daerah asal. Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut dengan daerah kawan. Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut dengan daerah hasil.



Gambar 5.6 Pasangan antara siswa dengan makanan kesukaan

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data:

- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah “Makanan kesukaan”.
- Jaya dan Budogol makanan kesukaannya adalah nasi goreng.
- Hany makanan kesukaannya adalah bakso.
- Nia makanan kesukaannya adalah mi goreng.
- Dany makanan kesukaannya adalah martabak.
- Tidak ada siswa yang makanan kesukaannya adalah pizza.

Berdasarkan Gambar 5.6 himpunan siswa disebut dengan daerah asal, himpunan makanan disebut dengan daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut dengan daerah hasil. Himpunan daerah asal adalah: {Jaya, Hany, Budogol, Nia, Dany}. Himpunan daerah kawan adalah: {bakso, mi goreng, pizza, nasi goreng, martabak}. Himpunan daerah hasil adalah: {bakso, mi goreng, nasi goreng, martabak}.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain*), dan daerah hasil (*range*), sebagai berikut.



Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut dengan domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.



Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut dengan kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.



Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut dengan *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Pertanyaan Kritis

Apakah ada kemungkinan bahwa anggota daerah kawan sama dengan anggota daerah hasil? Berikan alasanmu!

- Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.

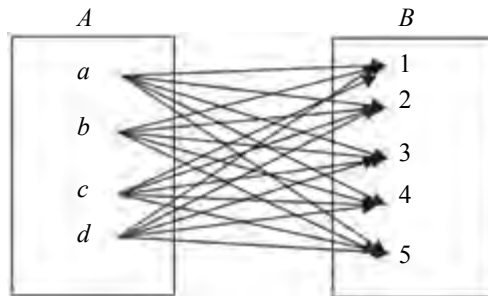


Contoh 5.1

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B .

Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B dapat ditunjukkan pada diagram berikut.



Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan A dan himpunan B sebanyak $4 \times 5 = 40$ buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5), \dots, (d,5)\}.$$

Secara umum himpunan pasangan berurutan dinyatakan sebagai berikut.



Definisi 5.5

Misalkan A dan B dua buah himpunan. Relasi pasangan berurutan dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A ke setiap anggota himpunan B . Dapat ditulis

$$A \times B = \{(x,y) \mid \forall x \in A \text{ dan } y \in B\}.$$

2. Beberapa Sifat Relasi

Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan P . Relasi R dikatakan bersifat refleksif jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $(p, p) \in R$.



Contoh 5.2

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.



Contoh 5.3

Diberikan himpunan $Q = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan Q dengan $R = \{(a,b) \mid a \text{ kelipatan dari } b, \text{ dengan } a,b \in Q\}$, sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan Q berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.



Contoh 5.4

Diberikan himpunan $C = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \mid a + b < 9, \text{ dengan } a,b \in C\}$, maka diperoleh $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat refleksif sebab ada anggota himpunan C , yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau $(5, 5)$ bukan anggota R .

Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P . Relasi R dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Contoh 5.5

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat simetris sebab untuk setiap $(x,y) \in R$, berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 5.6

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x \text{ kelipatan } y, x, y \in A\}$, maka diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena $(4,2)$ anggota R tetapi $(2,4)$ bukan anggota R .

Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P . Relasi R bersifat transitif, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.7

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat transitif sebab $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.8

Diberikan himpunan $C = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$.

Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P . Relasi R dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.9

Diberikan himpunan $C = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \in C \mid a \text{ kelipatan } b, a,b \in C\}$ sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 5.10

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan S dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat antisimetris sebab terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$, tetapi $1 \neq 2$.

Sifat-5: Sifat Ekuivalensi

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P . Relasi R disebut relasi ekuivalensi jika dan hanya jika relasi R memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 5.11

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

- Coba kamu bekerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa R memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

3. Menemukan Konsep Fungsi



Masalah-5.2

Lima orang siswa yaitu: Afrita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka, hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

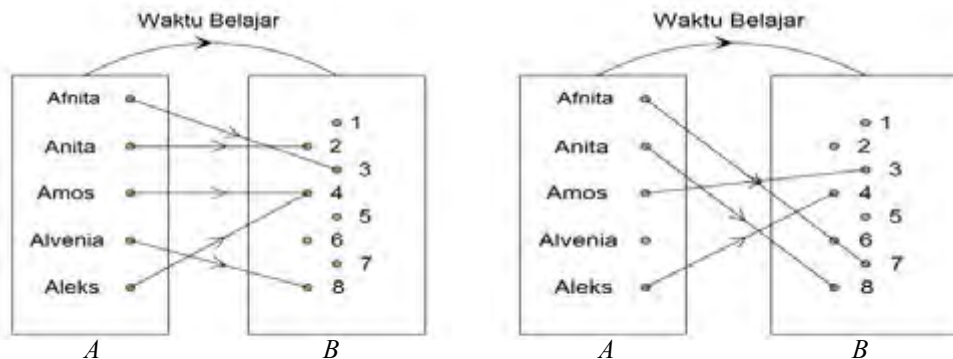
- 1) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan A , dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah anggota himpunan B , himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 - a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
 - b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan B ? Berikan penjelasanmu!
 - c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan B ? Berikan penjelasanmu!
 - d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan B ? Berikan penjelasanmu!
- 2) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan C , dan data tentang banyak saudara mereka ada di anggota himpunan D yang anggotanya, $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
 - b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan dengan anggota himpunan D ? Berikan penjelasanmu!
 - c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan D ? Berikan penjelasanmu!
 - d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota himpunan D ? Berikan penjelasanmu!

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui: $A = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- a. Relasi yang mungkin yang menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.



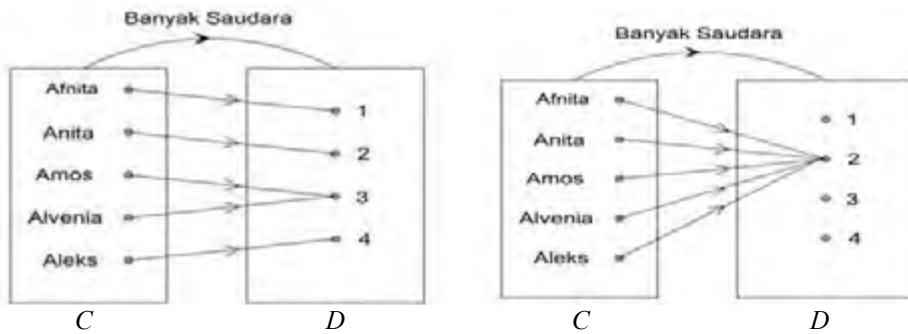
Gambar 5.7: Relasi rata-rata jam belajar

- b. Jawabannya adalah tidak. Oleh sebab anggota himpunan B telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan bisa seluruhnya memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.
- c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan A akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan B .
- d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan A memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan B .
2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan C , dan data tentang banyak saudara mereka himpunan D .

Diketahui: $C = \{\text{Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}\}$

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

- a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu, ditunjukkan pada diagram panah berikut.



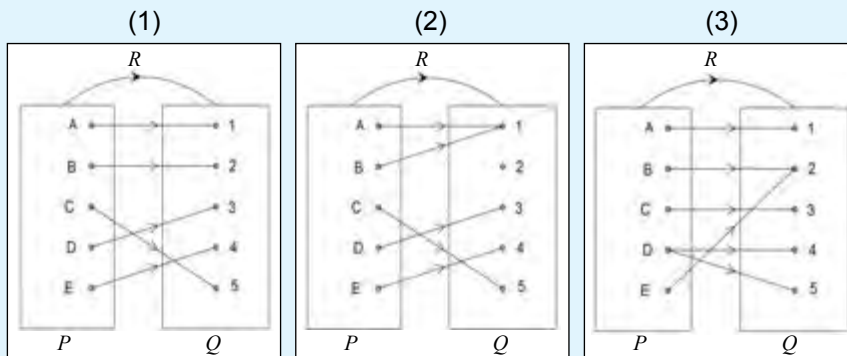
Gambar 5.8 Relasi banyak saudara

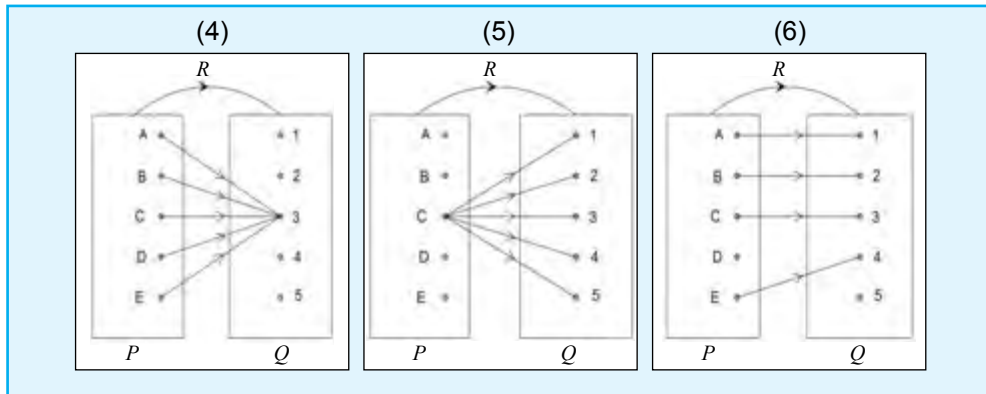
- b) Jawabannya ya. Oleh karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan D , maka seluruh anggota himpunan C pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan D .
- c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan C akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan D .
- d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan C memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan D .



Masalah-5.3

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.





Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 2:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 3:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 4:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q .

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 2:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 3:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 4:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P .

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q .
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q .

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

**Definisi 5.6**

Misalkan A dan B himpunan.

Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B .

Definisi 5.6 di atas, secara simbolik ditulis menjadi $f: A \rightarrow B$, dibaca: fungsi f memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B .

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh fungsi f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan x disebut prapeta dari y , dengan demikian dapat ditulis menjadi:

$f: x \rightarrow y$, dibaca: fungsi f memetakan x ke y , sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

Penyelesaian

- 1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu D yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan P memiliki pasangan di anggota himpunan Q .
- 2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
 - a. Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{A, B, D, E\}$.
 - b. Ada anggota himpunan P yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu $\{C\}$.
- 3) Relasi 6 bukan merupakan fungsi karena ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{D\}$.

Contoh 5.12

Diketahui fungsi $f: x \rightarrow f(x)$ dengan rumus fungsi $f(x) = px - q$. Jika $f(1) = -3$ dan $f(4) = 3$. Tentukanlah nilai p dan q , kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

Penyelesaian

Diketahui $f(x) = px - q$.

$$f(1) = -3$$

$$f(4) = 3.$$

Ditanya p , q , dan Rumus fungsi

Jika $f(1) = -3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow -3 = p - q$ (1)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika $f(4) = 3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow 3 = 4p - q$ (2)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika persamaan 1) dan persamaan 2) dieliminasi maka diperoleh:

$$-3 = p - q$$

$$\underline{3 = 4p - q}$$

$$-6 = p - 4p \rightarrow -6 = -3p \rightarrow p = 2$$

Substitusi nilai $p = 2$ ke persamaan $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$$-3 = 2 - q$$

$$-3 = 2 - q \rightarrow q = 2 + 3 \rightarrow q = 5$$

Jadi diperoleh $p = 2$ dan $q = 5$

Berdasarkan kedua nilai ini, maka rumus fungsi $f(x) = px - q$ menjadi $f(x) = 2x - 5$.



Contoh 5.13

Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = \sqrt{2x + 6}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

Penyelesaian

Diketahui: $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

Ditanya: domain f

Domain fungsi f memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila

$$2x + 6 \geq 0,$$

$$2x \geq -6 \leftrightarrow x \geq -3.$$



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

- Mengapa fungsi f memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real apabila $2x + 6 \geq 0$.
- Apakah f terdefinisi untuk $2x + 6 < 0$?
- Apakah $x = -4$ memiliki pasangan? Mengapa?



Contoh 5.14

Diketahui f suatu fungsi $f: x \rightarrow f(x)$. Jika 1 berpasangan dengan 4 dan $f(x+1) = 2f(x)$. Berapakah pasangan dari $x = 4$?

Penyelesaian

Diketahui: $f: x \rightarrow f(x)$

$$f(1) = 4$$

$$f(x+1) = 2f(x)$$

Ditanya: $f(4)$?

$$\rightarrow f(x+1) = 2f(x)$$

- untuk $x = 1$, maka $f(1+1) = 2f(1)$
- $f(2) = 2.f(1) = 2.4 = 8$
- $f(3) = 2.f(2) = 2.8 = 16$
- $f(4) = 2.f(3) = 2.16 = 32$
- maka $x = 4$ berpasangan dengan 32 atau $f(4) = 32$.



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

- a) Berapakah pasangan dari $x = 2013$?
- b) Bagaimana cara paling cepat untuk menemukan pasangan dari $x = 2013$?



Contoh 5.15

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$.
Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x .

Penyelesaian

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$.
Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x .

Diketahui: $y = \frac{x+2}{2x-6}$, dimana $2x - 6 \neq 0$ dan x anggota bilangan real.

Ditanya: rumus fungsi y ke x .

$$\rightarrow y = \frac{(x+2)}{(2x-6)} \text{ (kedua ruas kalikan dengan } 2x-6 \text{)}$$

$$\rightarrow (2x-6)(y) = x+2$$

$$\rightarrow 2xy - 6y = x+2$$

$$\rightarrow 2xy - x = 6y+2$$

$$\rightarrow x(2y-1) = 6y+2$$

$$\rightarrow x = \frac{(6y+2)}{(2y-1)} \text{ (kedua ruas bagi dengan } 2y-1 \text{)}$$

Maka fungsi g memetakan y ke x dengan rumus: $g(y) = \frac{x+2}{2x-6}$



Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

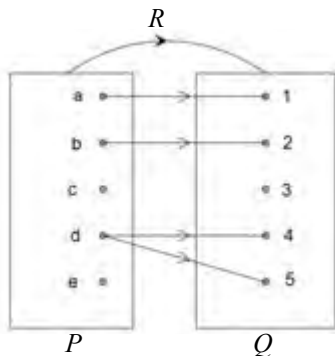
- Jika $f: x \rightarrow y$, apakah $x = 3$ memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?
- Jika $g: y \rightarrow x$, apakah $x = \frac{1}{2}$ memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?
- Berikan syarat agar $f: x \rightarrow y$ dapat terdefinisi.
- Berikan syarat agar $g: y \rightarrow x$ dapat terdefinisi.



Uji Kompetensi 5.1

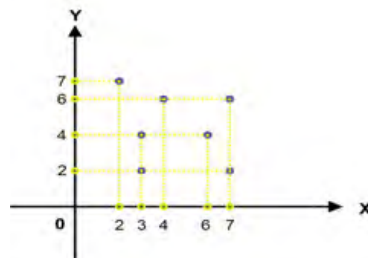
- Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi berikut.

a)



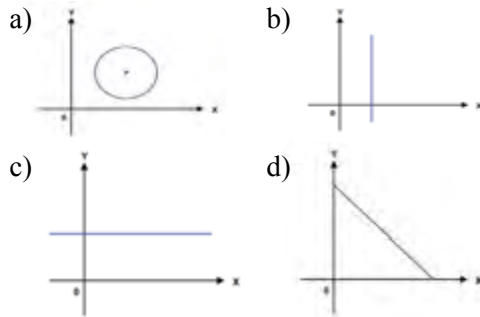
- Relasi pasangan berurutan: $\{(Yaska, Nora), (Riwanti, Pasaribu), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)\}$

c)



- Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu (Margono, Marsius, Maradona, Marisa, Martohap) berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia masing-masing anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah asilnya!
- Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nyatakanlah relasi A terhadap B dengan relasi berikut.

- a) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = A + 1$.
- b) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = 2A + 2$.
- Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak.
- 4) Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!
- 5) Jika $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$ tentukanlah $f(-x)$.
- 6) Jika $y = \frac{x+1}{x-1}$, tuliskanlah x sebagai fungsi dari y . Kemudian tentukanlah syarat kedua rumus fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap x, y merupakan bilangan real.
- 7) Diketahui $f(2x-3) = 4x-7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah....
- 8) Bila $f(x) = \frac{x}{a} \left[\frac{b^2}{x^2} \right] + \frac{x}{b} \left[1 - \frac{a^2}{x^2} \right]$, maka $f(a+b) = \dots$
- 9) Misalkan $f(n)$ didefinisikan kuadrat dari penjumlahan digit n . Misalkan juga $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(f(n)))$ dan seterusnya. Tentukan $f^{1998}(11)!$
- 10) Diketahui fungsi f dengan rumus $f = \sqrt{\frac{1}{2}x - 8}$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.
- 11) Perhatikan gambar berikut!
Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu x .



Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Tuliskan ciri-ciri fungsi tersebut, dan buat interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada bahasan 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi anda dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, dan fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Selanjutnya akan dibahas tentang barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu

Bab 6

Barisan dan Deret

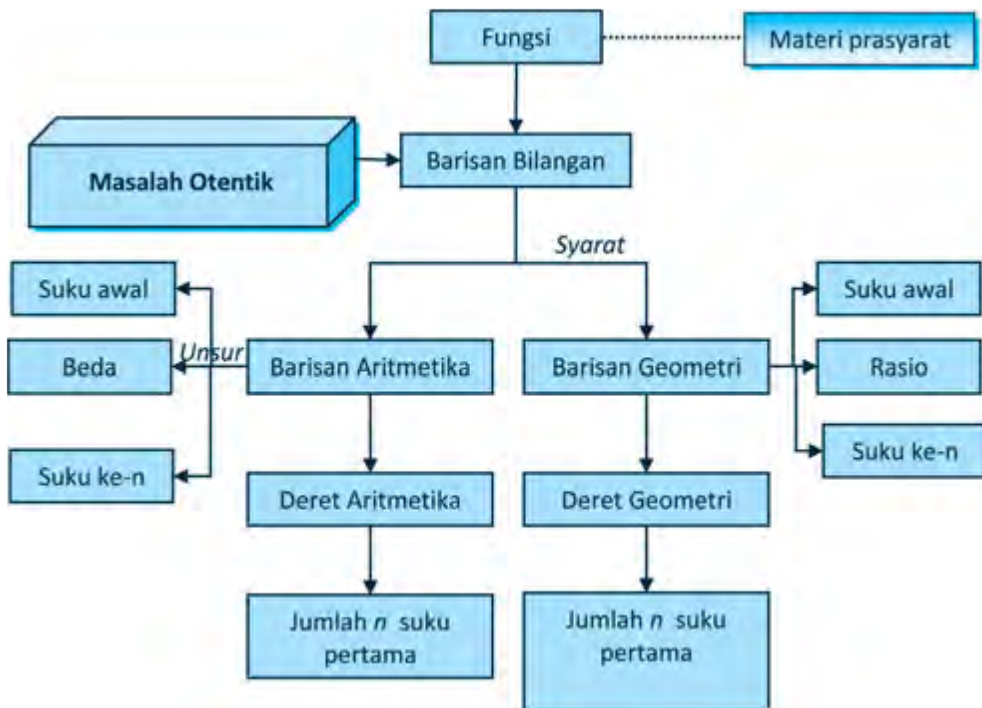
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran barisan dan deret, siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. memprediksi pola barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya melalui pengamatan dan memberikan alasannya;3. menyajikan hasil menemukan pola barisan dan deret dan penerapannya dalam penyelesaian masalah sederhana.	<p>Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik;• berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur;• berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Suku*
- *Jumlah n suku pertama*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Pola Barisan dan Deret

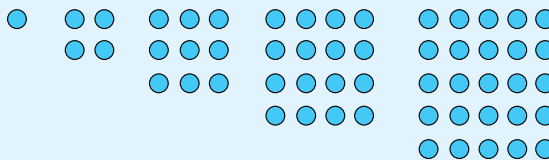
Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret, berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan dan deret akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Kita akan mempelajari beberapa kasus dan contoh yang berkaitan dengan barisan dan deret pada bab ini. Barisan suatu objek membicarakan masalah urutannya dengan aturan tertentu. Aturan yang dimaksud adalah pola barisan. Kita memerlukan pengamatan terhadap suatu barisan untuk menemukan pola.



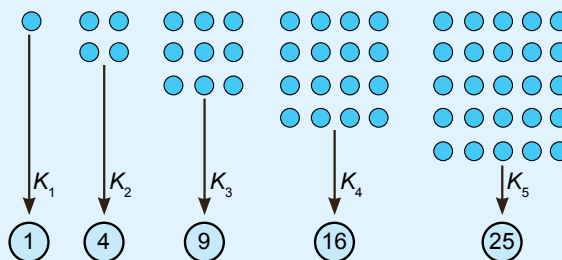
Masalah-6.1

Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut:



Gambar 6.1 Susunan Kelereng

Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan: 1, 4, 9, 16, 25.

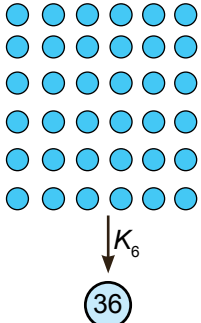


Gambar 6.2 Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok

Permasalahan:

Dapatkan kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkan kamu temukan pola barisan tersebut? Tentukan banyak kelereng pada kelompok ke-15?

Alternatif Penyelesaian

- 

Kemungkinan metode yang dapat digunakan adalah membuat susunan benda berikutnya dan menghitung kembali banyak kelereng pada susunan itu.

Alternatif penyelesaian ini tidak efektif dan tidak efisien karena harus menyusun kembali banyak kelereng untuk kelompok berikutnya.

Gambar 6.3 Jumlah kelereng pada kelompok ke-6

- Alternatif penyelesaian lainnya adalah menemukan pola barisan tersebut. Perhatikan tabel berikut!

Tabel 6.1 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 \times 1$
K_2	4	$4 = 2 \times 2$
K_3	9	$9 = 3 \times 3$
K_4	16	$16 = 4 \times 4$
K_5	25	$25 = 5 \times 5$
...
K_n	?	$? = n \times n$

Dengan pola barisan pada tabel di atas, bilangan berikutnya adalah $K_6 = 6 \times 6 = 36$ dan bilangan pada $K_{15} = 15 \times 15 = 225$.

- Apakah ada pola yang lain pada barisan tersebut? Silahkan amati kembali tabel berikut!

Tabel 6.2 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 + 0 = 1 + 1 \times 0$
K_2	4	$4 = 2 + 2 = 2 + 2 \times 1$
K_3	9	$9 = 3 + 6 = 3 + 3 \times 2$
K_4	16	$16 = 4 + 12 = 4 + 4 \times 3$
K_5	25	$25 = 5 + 20 = 5 + 5 \times 4$
...
K_n	?	$? = n + n \times (n - 1)$

Jadi pola barisan adalah $K_n = n + n \times (n-1)$ sehingga bilangan berikutnya adalah $K_6 = 6 + 6 \times 5 = 36$ dan bilangan pada $K_{15} = 15 + 15 \times 14 = 225$.

Kamu dapat dengan mudah menentukan bilangan-bilangan berikutnya pada sebuah barisan bilangan jika dapat menemukan pola barisannya. Silahkan pelajari pola barisan pada beberapa contoh berikut.

Contoh 6.1

Perhatikan barisan huruf berikut:

$ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD \dots$

Amatilah barisan huruf tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah huruf pada urutan $2^5 \times 3^3!$

Penyelesaian

Pertama, kita perhatikan urutan setiap huruf pada barisan, sebagai berikut:

A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D ...
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 ...

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok huruf $ABBCCCDDDD$ pada urutan 1 sampai 10 berulang. Perulangan kelompok huruf terjadi pada setiap kelipatan 10 huruf pertama. Jadi, huruf pada urutan 1 sama dengan huruf pada urutan 11, urutan 21, urutan 31, dan seterusnya.

Kedua, huruf pada urutan $2^5 \times 3^3$ adalah huruf pada urutan $32 \times 27 = 864$ atau $864 = 860 + 4 = 86 \times 10 + 4$ sehingga perulangan kelompok huruf tersebut mengalami perulangan sebanyak 86 kali. Dengan demikian, huruf pada urutan ke-864 sama dengan huruf pada urutan ke-4 atau C. Perhatikan tabel di bawah ini!

Tabel 6.3 Urutan barisan huruf

Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf	...	Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf
1	A	11	A	...	851	A	861	A
2	B	12	B	...	852	B	862	B
3	B	13	B	...	853	B	863	B
4	C	14	C	...	854	C	864	C
5	C	15	C	...	855	C		
6	C	16	C	...	856	C		
7	D	17	D	...	857	D		
8	D	18	D	...	858	D		
9	D	19	D	...	859	D		
10	D	20	D	...	860	D		



Contoh 6.2

Sebuah barisan bilangan dituliskan sebagai berikut: 1234567891011121314151617181920212223242526... sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1 dan seterusnya. Dapatkah anda temukan bilangan yang menempati suku ke-2004?

Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, sebagai berikut:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	1	1	2	1	3	1	...	?
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	...	u_{2004}

u_n menyatakan suku ke- n pada barisan dengan $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Kita akan mencari bilangan yang menempati suku ke-2004 dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (1 sampai 9):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 9 = 9$ suku.

Langkah 2. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 99)

10, 11, 12, 13, ..., 19 terdapat 2×10 suku = 20 suku

20, 21, 22, 23, ..., 29 terdapat 2×10 suku = 20 suku

...

90, 91, 92, 93, ..., 99 terdapat 2×10 suku = 20 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 20 = 180$ suku.

Jadi, banyak suku pada barisan 1 sampai 99 adalah $9 + 180 = 189$ suku.

Langkah 3. Mencari banyak suku pada barisan bilangan ratusan (100 sampai 999)

Jika ratusan (100 sampai 99)

100, 101, 102, 103, ..., 109 terdapat 3×10 suku = 30 suku

110, 111, 112, 113, ..., 119 terdapat 3×10 suku = 30 suku

120, 121, 122, 123, ..., 129 terdapat 3×10 suku = 30 suku

...

690, 691, 692, 693, ..., 699 terdapat 3×10 suku = 30 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dengan ratusan 1 sampai 6 adalah $6 \times 10 \times 30 = 1800$ suku

Jadi terdapat sebanyak $9 + 180 + 1800 = 1989$ suku pada barisan bilangan 1 sampai dengan 699 sehingga suku ke-1989 adalah 9. Suku berikutnya (suku ke-1990) adalah barisan bilangan dengan ratusan sebagai berikut.

9	7	0	0	7	0	1	7	0	2	7	0	3	7	0	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_{1989}	u_{1990}	u_{1991}	u_{1992}	u_{1993}	u_{1994}	u_{1995}	u_{1996}	u_{1997}	u_{1998}	u_{1999}	u_{2000}	u_{2001}	u_{2002}	u_{2003}	u_{2004}

Bilangan pada suku ke-2004 adalah 4.

Contoh 6.3

Tentukan pola barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots, \frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut!

Penyelesaian

Jika u_n adalah suku ke- n dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ maka barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.4 Pola Barisan

Suku ke	Nilai	Pola
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{1^2 + 1}$
u_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2^2 + 2}$
u_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} = \frac{1}{3^2 + 3}$
u_4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} = \frac{1}{4^2 + 4}$
u_5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30} = \frac{1}{5^2 + 5}$
u_6	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42} = \frac{1}{6^2 + 6}$
...
u_n	?	$? = \frac{1}{n^2 + n}$

Berdasarkan pola barisan $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ yang telah diperoleh pada tabel di bawah maka

$$u_n = \frac{1}{9900} \text{ atau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{9900}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n = 9900$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 99)(n + 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow n_1 = 99 \text{ atau } n_2 = -100$$

Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots, \frac{1}{9900}$ terdiri dari 99 suku.

- Diskusikan dengan temanmu kenapa yang digunakan $n = 99$?

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ maka deret dari barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.5: Pola Deret

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	$\frac{1}{2}$
s_2	$u_1 + u_2$	$\frac{2}{3}$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$\frac{3}{4}$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$\frac{4}{5}$
s_5	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{5}{6}$
s_6	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{6}{7}$
...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \dots + u_n$	$s_n = \frac{n}{n+1}$

Berdasarkan tabel di atas, $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$, yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{99}{100}, \dots$ adalah sebuah barisan dengan pola $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Karena $n = 99$ maka $s_{99} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{99}{100}$.

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ atau $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$ dan $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ maka $s_n = s_{n-1} + u_n$ atau $u_n = s_n - s_{n-1}$.



Contoh 6.4

Suatu barisan dengan pola deret $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10!

Penyelesaian

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ maka

$$s_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$s_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$s_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$u_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $u_n = 6n^2 - 12n + 5$ sehingga:

$$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

2. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Aritmetika

Pada sub-bab di atas, kita telah membicarakan masalah pola dari barisan dan deret bilangan secara umum. Berikutnya, kita akan belajar menemukan konsep barisan dan deret aritmetika.

a. Barisan Aritmetika



Masalah-6.2



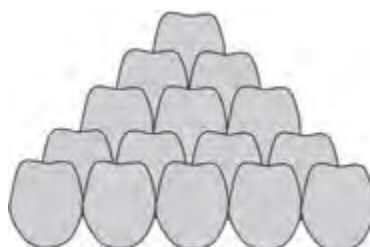
Gambar 6.4 Tumpukan Buah Jeruk

Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak buah dalam satu tumpukan?

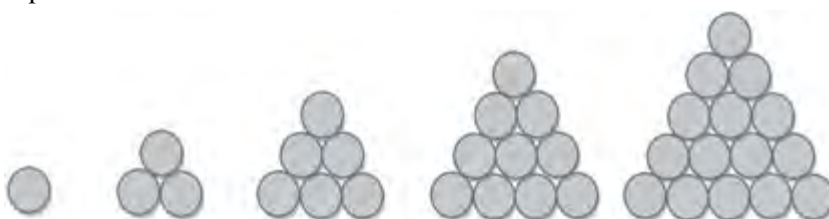
Alternatif Penyelesaian

Jika diperhatikan Gambar 6.5, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida.

Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti Gambar 6.6.



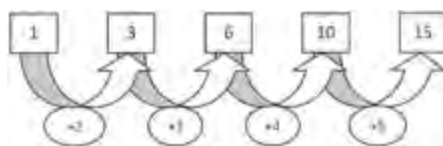
Gambar 6.5 Susunan piramida jeruk



Gambar 6.6 Susunan bulatan bentuk segitiga

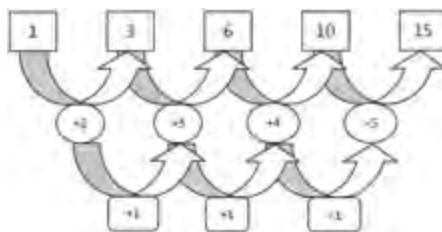
- Mengapa harus dengan susunan segitiga, coba lakukan dengan susunan segi empat. Apa yang kamu temukan?

Banyaknya bulatan yang tersusun dari setiap kelompok dapat dituliskan dengan bilangan, yaitu 1, 3, 6, 10, 15. Bilangan tersebut membentuk barisan perhatikan polanya pada Gambar 6.7 berikut.



Gambar 6.7. Pola susunan banyak jeruk dalam tumpukan

Ternyata beda antara setiap dua bilangan yang berdekatan membentuk barisan yang baru yaitu 2, 3, 4, 5,... Perhatikan skemanya pada Gambar 6.8 berikut.



Gambar 6.8. Pola turunan banyak jeruk dalam tumpukan

Beda setiap dua bilangan yang berdekatan pada barisan 2, 3, 4, 5,... adalah tetap yaitu 1. Dengan demikian barisan 2, 3, 4, 5,... disebut “Barisan Aritmetika” dan barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut “Barisan Aritmetika Tingkat Dua”.

- Coba kamu bentuk sebuah barisan aritmetika tingkat tiga?



Masalah-6.3



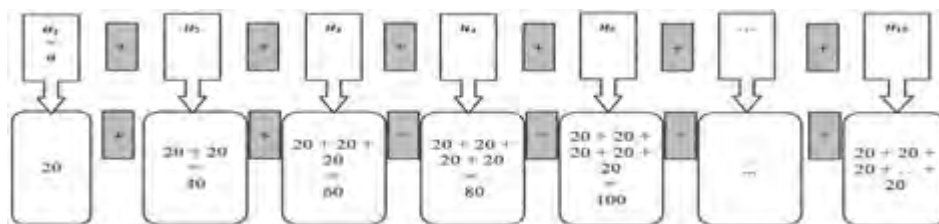
Gambar 6.9: Tangga

Perhatikan masalah berikut!

Jika tinggi satu buah anak tangga adalah 20 cm, berapakah tinggi tangga jika terdapat 15 buah anak tangga? Tentukanlah pola barisan?

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan tinggi tangga maka permasalahan di atas diurutkan menjadi:



Dari uraian di atas, ditemukan susunan bilangan 20, 40, 60, 80, ...

u_n : suku ke- n

$$u_1 = 20 = 1 \times 20$$

$$u_2 = 40 = 2 \times 20$$

$$u_3 = 60 = 3 \times 20$$

$$u_4 = 80 = 4 \times 20$$

$$u_5 = 100 = 5 \times 20$$

...

$$u_n = n \times 20 = 20n$$

Cermati pola bilangan $u_n = 20n$, sehingga $u_{15} = 15 \times 20 = 300$.
Berarti tinggi tangga tersebut sampai anak tangga yang ke-15 adalah 300 cm.



Masalah-6.4

Mbak Suci, seorang pengerajin batik di Gunung Kidul, ia dapat menyelesaikan 6 helai kain batik berukuran $2,4 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ selama 1 bulan. Permintaan kain batik terus bertambah sehingga Mba Suci harus menyediakan 9 helai kain batik pada bulan kedua, dan 12 helai pada bulan ketiga. Dia menduga, jumlah kain batik untuk bulan berikutnya akan 3 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Dengan pola kerja tersebut, pada bulan berapakah Mbak Suci menyelesaikan 63 helai kain batik?

Alternatif Penyelesaian

Dari Masalah-6.4, dapat dituliskan jumlah kain batik sejak bulan pertama seperti di bawah ini.

$$\text{Bulan I} : u_1 = a = 6$$

$$\text{Bulan II} : u_2 = 6 + 1.3 = 9$$

$$\text{Bulan III} : u_3 = 6 + 2.3 = 12$$

$$\text{Bulan IV} : u_4 = 6 + 3.3 = 15$$

Demikian seterusnya bertambah 3 helai kain batik untuk bulan-bulan berikutnya sehingga bulan ke- n : $u_n = 6 + (n-1).3$ (n merupakan bilangan asli).

Sesuai dengan pola di atas, 63 helai kain batik selesai dikerjakan pada bulan ke- n .

Untuk menentukan n , dapat diperoleh dari,

$$63 = 6 + (n - 1).3$$

$$63 = 6 + 3n$$

$$n = 20.$$

Jadi, pada bulan ke-20, Mbak Suci mampu menyelesaikan 63 helai kain batik.

Jika beda antara dua bilangan berdekatan di notasikan " b ", maka pola susunan bilangan 6, 9, 12, 15, ..., dapat dituliskan $u_n = a + (n - 1).b$.



Definisi 6.1

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama.

Beda, dinotasikan " b " memenuhi pola berikut.

$$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots = u_n - u_{(n-1)}$$

n adalah bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke- n .

Berdasarkan definisi di atas maka diperoleh bentuk umum barisan aritmetika sebagai berikut.

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_n$$

Setiap dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, maka diperoleh

$$\begin{aligned} u_1 &= a \\ u_2 &= u_1 + 1.b \\ u_3 &= u_2 + b = u_1 + 2.b \\ u_4 &= u_3 + b = u_1 + 3.b \\ u_5 &= u_4 + b = u_1 + 4.b \\ &\dots \\ u_n &= u_1 + (n - 1)b \end{aligned}$$

Sifat-1

Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika. Rumus suku ke- n dari barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$u_n = a + (n - 1)b$$

$a = u_1$ adalah suku pertama barisan aritmetika

b adalah beda barisan aritmetika



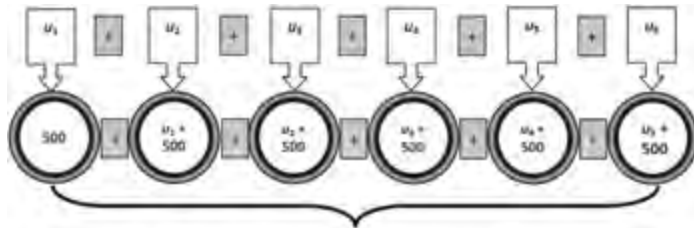
Masalah-6.5

Setiap hari Orlyn menabungkan sisa uang jajannya. Uang yang ditabung setiap hari selama enam hari mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama $a = 500$ dan beda $b = 500$.

Bagaimana cara mengetahui banyaknya uang Orlyn yang ditabung pada hari ke-6?

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian Masalah-6.5 dapat dilakukan dengan membuat barisan aritmetika dari uang yang ditabung Orlyn kemudian menentukan suku terakhirnya.



$$\begin{aligned}
 \text{Karena } u_n &= a + (n - 1)b \text{ maka } u_6 &= (a + 5b) \\
 & &= 500 + 5(500) \\
 & &= 500 + 2500 \\
 & &= 3000
 \end{aligned}$$

Berarti tabungan Orlyn pada hari ke-6 adalah Rp 3000,00.

Contoh 6.5

Tentukan nilai dari suku ke- n pada barisan di bawah ini!

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... tentukan suku ke-15!
- 4, 1, -2, -5, -8, ... tentukan suku ke-18!

Penyelesaian

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Dari barisan bilangan tersebut, diketahui bahwa

$$u_1 = a = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots$$

$$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 1.$$

$$\text{Karena } u_n = a + (n - 1)b, \text{ maka } u_{15} = a + (15 - 1)b.$$

$$u_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 1 = 15$$

- 4, 1, -2, -5, -8, ...

Diketahui:

$$u_1 = a = 4, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = -5 \dots$$

$$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -3.$$

$$\text{Karena } u_n = a + (n - 1)b, \text{ maka } u_{18} = a + (18 - 1)b.$$

$$u_{18} = 4 + (18 - 1) \cdot (-3) = -47$$

b. Induksi Matematika

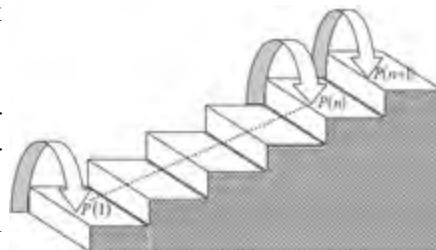
Misalkan untuk setiap bilangan asli n kita mempunyai pernyataan $P(n)$.

- $P(1)$ bernilai benar.
- Jika $P(n)$ benar, maka $P(n - 1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Maka $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

$P(1)$ bernilai benar disebut langkah dasar sedangkan jika $P(n)$ benar, maka $P(n + 1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$ disebut langkah induktif.

Prinsip pembuktian induktif dapat diilustrasikan dengan proses menaiki anak tangga.



Gambar 6.10 Anak Tangga



Contoh 6.6

Selidiki apakah jumlah n bilangan asli pertama, yaitu $1 + 2 + \dots + n$ sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$!

Penyelesaian

Misalkan pernyataan $P(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Langkah 1

Menunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$, diperoleh $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ maka untuk $n = 1$ pernyataan tersebut benar.

Langkah 2

Anggap pernyataan tersebut benar untuk $n = k$ yakni:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Langkah 3

Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$, yaitu:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Bukti:

Dengan menggunakan manipulasi aljabar diperoleh:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Berarti untuk $n = k + 1$, $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar.

Jadi, $P(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar untuk n anggota himpunan bilangan asli.

Latihan 6.1

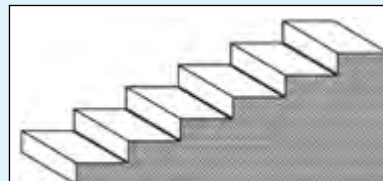
Selidiki kebenaran pernyataan $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

c. Deret Aritmetika



Masalah-6.6

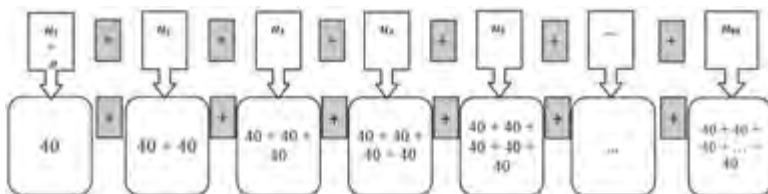
Perhatikan kembali gambar di samping! Apakah kamu masih ingat tentang masalah anak tangga? Jika membuat sebuah anak tangga dibutuhkan 40 buah batu bata, berapa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 buah anak tangga?



Gambar 6.11: Tangga

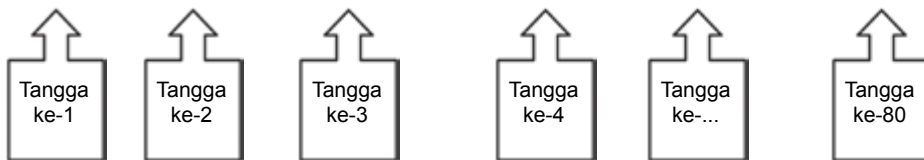
Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan banyaknya batu bata yang dibutuhkan dalam membuat anak tangga pertama sampai anak tangga yang ke 80 dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas dapat disimpulkan bahwa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 buah anak tangga:

$$40 + (40 + 40) + (40 + 40 + 40) + (40 + 40 + 40 + 40) + \dots + (40 + 40 + 40 + 40 + 40 + \dots)$$



Susunan banyak batu bata membentuk barisan aritmetika:

40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, ...

Cukup jelas, bahwa, $u_1 = 40$ dan $b = 40$, maka $u_{80} = 3200$.

Karena pertanyaan dalam masalah ini adalah banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga, bukan banyak batu bata yang diperlukan membuat tangga ke-80 maka banyak batu bata harus dijumlahkan.

$$\underbrace{40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 400 + \dots + 3160 + 3200}_{\text{sebanyak 80 suku}}$$

s_n adalah jumlah n suku pertama pada barisan. Perhatikan pola berikut:

- $s_2 = 40 + 80 = \frac{(40 + 80) \times 2}{2} = 120$
- $s_4 = 40 + 80 + 120 + 160 = \frac{(40 + 160) \times 4}{2} = 400$
- $s_6 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 = \frac{(40 + 240) \times 6}{2} = 840$
- $s_8 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 = \frac{(40 + 320) \times 8}{2} = 1440$.

Jadi, untuk menghitung jumlah 80 suku pertama, dilakukan dengan pola di atas,

$$s_{80} = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 360 + 400 + \dots + 3160 + 3200$$

$$= \frac{(40 + 3200) \times 80}{2} = 129.000.$$

Jadi, banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga adalah 129.000 buah batu bata.

- Untuk penjumlahan bilangan di atas, bagaimana cara yang kamu gunakan jika banyak bilangan yang akan dijumlahkan adalah ganjil?

Susunan jumlah suku-suku barisan aritmetika, dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
s_1 &= u_1 \\
s_2 &= u_1 + u_2 \\
s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
s_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
&\dots \\
s_{(n-1)} &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{(n-1)} \\
s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{(n-1)} + u_n
\end{aligned}$$

n merupakan bilangan asli.



Definisi 6.2

Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama barisan aritmetika, $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{(n-1)}, s_n, \dots$ dengan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{(n-1)} + u_n$

Untuk menentukan jumlah n suku pertama, ditentukan rumus berikut:

$$s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b) \quad \dots\dots\dots (1)$$

Persamaan 1) diubah menjadi

$$s_n = (a + (n - 1)b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$$2s_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \dots + 2a + (n - 1)b$$

$$2s_n = n(2a + (n - 1)b)$$

$$s_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b)$$

Sifat-2

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1} + u_n$ merupakan jumlah n suku pertama barisan aritmetika,
 $s_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$



Contoh 6.7

Carilah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9!

Penyelesaian

Bilangan bulat yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah
 9, 18, 27, ..., 99

Bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 9$, $b = 9$, dan $u_n = 99$. Selanjutnya akan ditentukan nilai n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_n = 99 &\Leftrightarrow a + (n - 1)b = 99 \\ &\Leftrightarrow 9 + (n - 1)9 = 99 \\ &\Leftrightarrow 9 + 9n - 9 = 99 \\ &\Leftrightarrow 9n = 99 \\ &\Leftrightarrow n = 10 \end{aligned}$$

Jadi, banyak bilangan yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah 10. Dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika diperoleh:

$$s_n = \frac{1}{2}n(a + u_n) \quad \text{atau} \quad s_{10} = \frac{1}{2}(10)(9 + 99) = 540$$

Dengan demikian, $9 + 18 + 27 + 36 + 45 + \dots + 99 = 540$.



Contoh 6.8

Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + 50 = 1139$. Jika a bilangan bulat positif, maka nilai $a = \dots$

Penyelesaian

Suku ke- n barisan bilangan di atas adalah 50, sehingga

$$\begin{aligned} u_n = a + (n - 1)b &\Leftrightarrow 50 = a + (n - 1)1 \\ &\Leftrightarrow a = 51 - n. \end{aligned}$$

Jumlah n suku pertama adalah 1.139 sehingga

$$\begin{aligned} s_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) &\Leftrightarrow 1139 = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)1), \text{ atau} \\ &\Leftrightarrow 2278 = n((2a + (n - 1))). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $a = 51 - n$, diperoleh $n^2 - 101n + 2278 = 0$.

- Ingat kembali cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat yang telah kamu pelajari SMP.

$$\begin{aligned} n^2 - 101n + 2278 = 0 &\Leftrightarrow (n - 67).(n - 34) = 0. \\ \text{diperoleh, } n = 67 &\text{ atau } n = 34. \end{aligned}$$

Jika nilai a bilangan bulat positif maka nilai yang memenuhi adalah $n = 34$ dengan nilai $a = 17$.



Contoh 6.9

Diketahui deret aritmetika tingkat satu dengan s_n adalah jumlah n suku pertama. Jika $s_n = (m^3 - 1)n^2 - (m^2 + 2)n + m - 3$, maka tentukanlah suku ke-10 pada barisan tersebut!

Penyelesaian

Dengan mengingat kembali rumus deret aritmetika tingkat satu:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{b}{2}n^2 + (a-b)n$$

maka

$s_n = (m^3 - 1)n^2 - (m^2 + 2)n + m - 3$ akan menjadi deret aritmetika tingkat satu jika $m - 3 = 0$ atau $m = 3$ sehingga $s_n = (3^3 - 1)n^2 - (3^2 + 2)n + (3 - 3) = 26n^2 - 11n$.

Jadi, $u_{10} = s_{10} - s_9 = (26(10^2) - 11(10)) - (26(9^2) - 11(9)) = 2490 - 2007 = 483$.



Uji Kompetensi 6.1

- Tentukan jumlah deret aritmetika berikut!
 - $3 + 6 + 9 + 12 + \dots$ sampai dengan 18 suku.
 - $2 + 8 + 14 + 30 + \dots$ sampai dengan 10 suku.
 - $1 + 6 + 11 + 16 + \dots$ sampai dengan 14 suku.
 - $50 + 46 + 42 + 38 + \dots$ sampai dengan 10 suku.
 - $-22 - 16 - 10 - 4 - \dots$ sampai dengan 20 suku.
- Tentukan banyak suku dan jumlah deret aritmetika berikut!
 - $4 + 9 + 14 + 19 + \dots + 104$
 - $72 + 66 + 60 + 54 + \dots + 12$
 - $-12 - 8 - 4 - 0 - \dots - 128$
 - $-3 - 7 - 11 - 15 \dots - 107$
- Tentukan banyak suku dari deret berikut!
 - $6 + 9 + 12 + 15 + \dots = 756$
 - $56 + 51 + 46 + 41 + \dots = -36$
 - $10 + 14 + 18 + 22 + \dots = 640$
- Diketahui deret aritmetika dengan suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukanlah jumlah 20 suku pertama!
- Bila a , b , c merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc}$, $\frac{1}{ca}$, $\frac{1}{ab}$.

6. Tentukan banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5.
7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...
Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004 ? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).
8. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan persamaan berikut ini benar!
- a. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
9. Pola *A B B C C C D D D D A B B C C C D D D A B B C C C D D D D ...* berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^{63}4^?$
10. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...
Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2013? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).



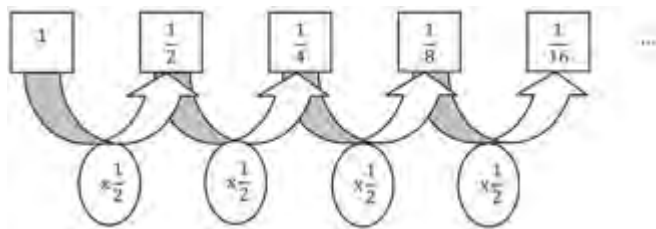
Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret aritmatika dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmatika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

3. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Geometri

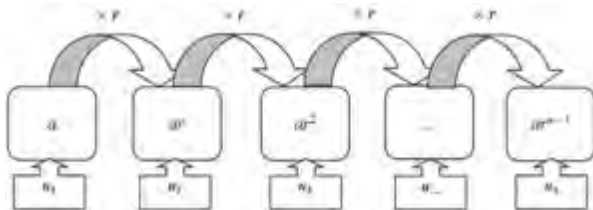
a. Barisan Geometri

Perhatikan susunan bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$



Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a , maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $1, 1\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right), \dots$

Perhatikan gambar berikut!



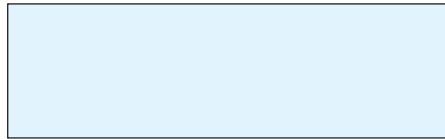
Sehingga:

- $u_1 = a = 1$
- $u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = u_1 \cdot r = a \cdot r$
- $u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad u_3 = u_2 \cdot r = a \cdot r \cdot r = a \cdot r^2$
- $u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad u_4 = u_3 \cdot r = a \cdot r^2 \cdot r = a \cdot r^3$
- $u_5 = u_4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \Leftrightarrow \quad u_5 = u_4 \cdot r = a \cdot r^3 \cdot r = a \cdot r^4$

Dari pola di atas, tentunya dengan mudah kamu pahami bahwa,

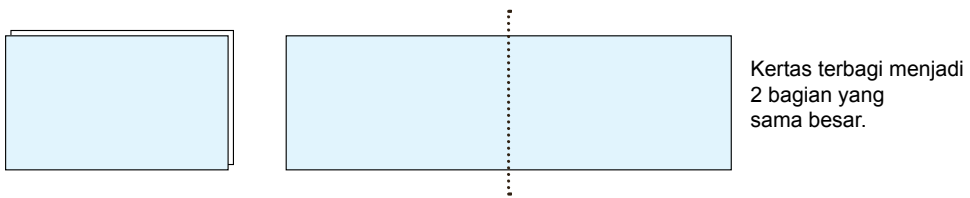
$$u_n = u_{n-1} \cdot r = a \cdot r^{n-2} \cdot r = a \cdot r^{n-1}$$

Orlando memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.



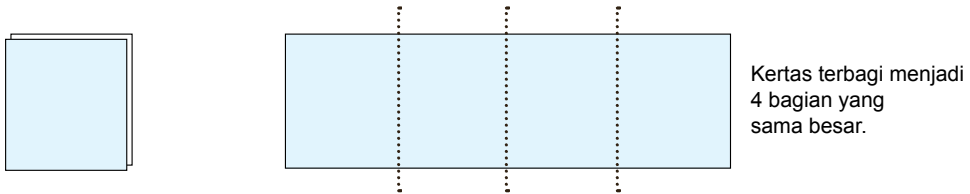
Gambar 6.12 Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.



Gambar 6.13 Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.



Gambar 6.14 Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Orlando terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia membuka hasil lipatan dan ditemukan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian. Perhatikan bagian kertas tersebut membentuk sebuah barisan bilangan yang disajikan sebagai berikut.



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$. Barisan bilangan ini disebut barisan geometri.



Definisi 6.3

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai perbandingan (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berurutan. Nilai r

$$\text{dinyatakan: } r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Sifat-3

Jika $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r adalah rasio, maka suku ke- n dinyatakan

$$u_n = ar^{n-1}, n \text{ adalah bilangan asli.}$$

b. Deret Geometri

Analog dengan konsep deret aritmetika, deret geometri juga penjumlahan bilangan-bilangan berurutan yang memiliki pola geometri. Cermati masalah di bawah ini!

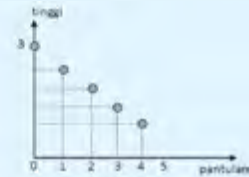


Masalah-6.8

Sebuah bola jatuh dari gedung setinggi 3 meter ke lantai dan memantul kembali

setinggi $\frac{4}{5}$ kali dari tinggi sebelumnya

Tentukanlah panjang lintasan bola tersebut sampai pada pantulan ke-10!



Gambar 6.15 Pantulan Bola

Pandang dan amatilah kembali gambar di atas! Tampak pada Gambar 6.15 bahwa terdapat 2 kali lintasan bola yang sama tingginya setelah pantulan pertama. Misalkan a ketinggian awal bola dan misalkan t tinggi pantulan maka tinggi pantulan bola dapat diberikan pada tabel berikut.

Tabel 6.6 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke ...	0	1	2	3	...
Tinggi pantulan (m)	3	$12/5$	$48/25$	$192/125$...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

- Coba kamu teruskan mengisi tabel pada pantulan berikutnya.
- Apakah mungkin terjadi ketinggian pantulan bola sama dengan nol?

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S .

$$S = u_1 + 2(u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{10})$$

$$\Leftrightarrow S = 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{10}) - u_1$$

$$\Leftrightarrow S = 2s_{10} - u_1$$

dimana

Tabel 6.7 Deret Pantulan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
S_1	u_1	3
S_2	$u_1 + u_2$	$3 + \frac{12}{5} = 3\left(\frac{9}{5}\right) = 3\left(\frac{25-16}{5}\right)$
S_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$3 + \frac{12}{5} + \frac{48}{25} = 3\left(\frac{61}{25}\right) = 3\left(\frac{125-64}{25}\right)$
S_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$3 + \frac{12}{5} + \frac{48}{25} + \frac{192}{125} = 3\left(\frac{369}{125}\right) = 3\left(\frac{625-256}{125}\right)$
...
S_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \dots + u_n$	$s_n = 3\left(\frac{5^n - 4^n}{5^{n-1}}\right)$

Berdasarkan Tabel 6.7 deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah,

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \text{ yaitu } 3\left(\frac{5^1 - 4^1}{5^0}\right), 3\left(\frac{5^2 - 4^2}{5^1}\right), 3\left(\frac{5^3 - 4^3}{5^2}\right), \dots, 3\left(\frac{5^n - 4^n}{5^{n-1}}\right).$$

$$\text{Sehingga } s_{10} = 3\left(\frac{5^{10} - 4^{10}}{5^9}\right)$$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah $S = 2s_{10} - u_1$ atau

$$S = 6\left(\frac{5^{10} - 4^{10}}{5^9}\right) - 3$$

- Coba kamu diskusikan bersama temanmu untuk mencari panjang lintasan bola pantul jika dilemparkan ke atas setinggi 5 meter dan memantul setinggi 4/5 kali dari tinggi sebelumnya.



Definisi 6.4

Deret geometri adalah barisan jumlah n suku pertama barisan geometri.
Bentuk umum:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

atau

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

dengan $u_1 = a$ dan r adalah rasio.

Sifat-4

Jika suatu deret geometri suku pertama adalah $u_1 = a$, dan rasio $= r$, maka jumlah n suku pertama adalah

i. $s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, untuk $r < 1$.

ii. $s_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, untuk $r > 1$.

iii. $s_n = na$, untuk $r = 1$.

Bukti:

i. $s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ (1)

Dengan mengalihkan kedua ruas persamaan 1) dengan r , didapatkan Persamaan berikut.

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$
 (2)

Sekarang, selisih persamaan (1) dengan (2), diperoleh

$$s_n - rs_n = (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n)$$

$$s_n(1-r) = a - ar^n$$

$$s_n = s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1.$$

ii. Untuk membuktikan prinsip ini, coba kamu kerjakan sebagai berikut.

Contoh 6.10

Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut ini!

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$$

Penyelesaian

Pertama harus ditentukan rasio deret bilangan tersebut.

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{4}.$$

Karena $r < 1$, maka jumlah 10 suku pertama ditentukan melalui rumus,

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{Akibatnya, } s_{10} = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right).$$

Pertanyaan Kritis

Perhatikan pola barisan bilangan berikut!

- a) 1, 3, 7, 9, ...
- b) 1, 4, 9, 16, ...
- c) 3, 1, 4, 2, 5, ...

Apakah barisan tersebut termasuk barisan aritmetika atau barisan geometri?
Tentukanlah suku ke 10 dari pola barisan di atas!



Uji Kompetensi 6.2

1. Untuk memeriksa sebuah barisan merupakan barisan geometri apakah cukup hanya dengan menentukan rasio dua suku berturut-turut? Jelaskan dengan menggunakan contoh!
2. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!
3. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Tentukan Hasil kali dari ketiga bilangan tersebut!
4. Suku-suku barisan geometri tak hingga adalah positif, jumlah $u_1 + u_2 = 60$, dan $u_3 + u_4 = 15$, tentukan jumlah suku barisan itu!
5. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 8m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Berapakah jarak lintasan seluruhnya?
6. Jika jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 72 dan jumlah semua sukunya yang berindeks ganjil adalah 48, tentukan suku ke-3 deret tersebut!
7. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2.5%?
8. Pertumbuhan ekonomi biasanya dalam persen. Misalnya, pertumbuhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami pertumbuhan sebesar 6.5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB tahun ini PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.
9. Jika barisan x_1, x_2, x_3, \dots memenuhi

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n^3$, untuk semua n bilangan asli, maka $x_{100} = \dots$

10. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun

selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp200.000,00 per gram, tentukan harga sabun tersebut empat tahun lagi.



Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret geometri dalam bidang fisika, teknologi informasi dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret geometri di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret, disajikan sebagai berikut.

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki beda dua suku berurutan selalu tetap.
3. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku barisan aritmetika.
4. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.
5. Deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan geometri.
6. Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan fibonacci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan dan deret.

Selanjutnya kita akan membahas materi persamaan dan fungsi kuadrat. Tentu kamu wajib mengulangi mempelajari materi persamaan linear, relasi, dan fungsi, sebab materi tersebut adalah prasyarat utama mempelajari persamaan dan fungsi kuadrat.

Bab 7

Persamaan dan Fungsi Kuadrat

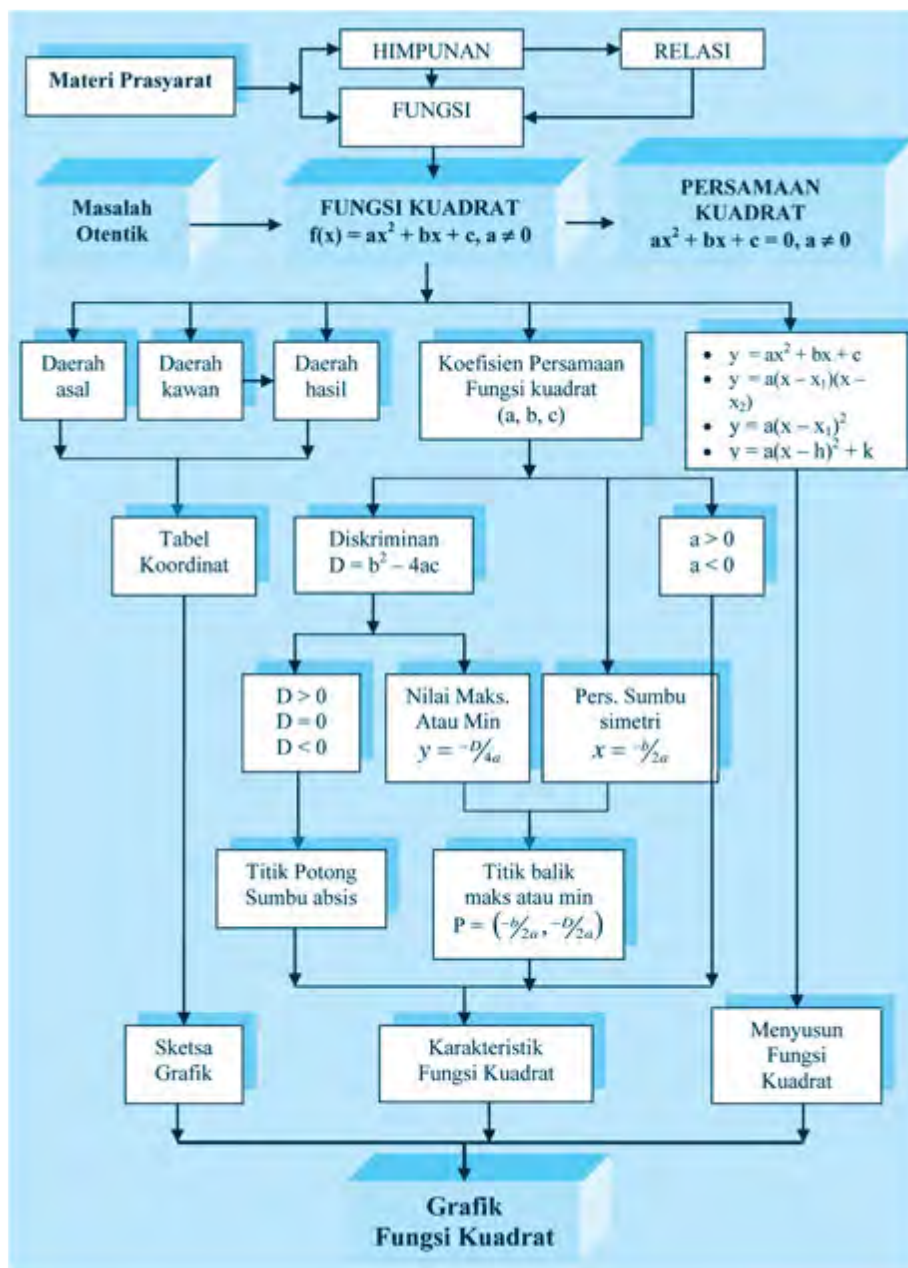
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran persamaan siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya;3. menganalisis persamaan kuadrat dalam berbagai bentuk penyajian masalah kontekstual;4. Memahami konsep dan prinsip persamaan dan fungsi kuadrat serta menggambarkan grafiknya dalam sistem koordinat;5. memahami berbagai bentuk ekspresi yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat dan mengidentifikasi sifat-sifatnya;6. menganalisis persamaan kuadrat dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat;7. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan masalah nyata serta memeriksa kebenaran jawabannya;8. menganalisis grafik fungsi dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa fungsi kuadrat.	<p>Melalui pembelajaran materi fungsi kuadrat, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menjelaskan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait dengan model matematika sebagai persamaan kuadrat;• merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat;• menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan;• menafsirkan hasil pemecahan masalah;• menuliskan ciri-ciri persamaan dan fungsi kuadrat dari beberapa model matematika;• menuliskan konsep persamaan dan fungsi kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri;• menurunkan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat berdasarkan konsep yang sudah dimiliki;• menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan pemfaktoran, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus abc;• menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat;• menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya memenuhi kondisi tertentu;• menggunakan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk memecahkan masalah otentik;• menentukan persamaan sumbu simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat;• menggambarkan grafik fungsi kuadrat;• menentukan fungsi kuadrat, jika diberi tiga titik yang tidak segaris;• menjelaskan kaitan fungsi kuadrat dan persamaan kuadrat;• menggunakan konsep dan prinsip fungsi kuadrat untuk memecahkan masalah otentik dan soal-soal.

Istilah Penting

- *Persamaan Kuadrat*
- *Peubah*
- *Koefisien*
- *Konstanta*
- *Akar-akar Persamaan*
- *Fungsi kuadrat*
- *Parabola*
- *Sumbu Simetri*
- *Titik Puncak*
- *Nilai Maksimum dan Minimum*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

I. PERSAMAAN KUADRAT

1. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Peubah

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang pemecahannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip persamaan kuadrat, sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep persamaan kuadrat dapat dibangun/ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD, SMP, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, kamu bisa pada kesepakatan antara kamu dan teman-teman serta guru, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi atau tidak boleh ada di dalamnya, unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, dan rumus-rumus yang saling bertentangan. Alat ukur kebenarannya, jika konsep yang ditemukan, ukuran kebenarannya apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.



Masalah-7.1

Arsitek Ferdinand Silaban merancang sebuah rumah adat Batak di daerah Tuk-tuk di tepi Danau Toba. Ia menginginkan luas penampang atap bagian depan 12 m^2 . Di dalam penampang dibentuk sebuah persegi panjang tempat ornamen (ukiran) Batak dengan ukuran lebar 2 m dan tingginya 3 m . Bantulah Pak Silaban menentukan panjang alas penampang atap dan tinggi atap bagian depan!



Gambar 7.1 Rumah Adat

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan sajikan/dekati masalah dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi supaya dapat terpecahkan. Perhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut. Gunakan sebagai langkah awal untuk menyelesaikan masalah. Ingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan kongruen dan lakukan perbandingan panjang sisi-sisi kedua bangun tersebut untuk memperoleh persamaan tinggi penampang atap.

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai variabel dengan menggunakan manipulasi aljabar pada persamaan yang diperoleh? Berdasarkan nilai variabel akan ditentukan tinggi penampang atap dan panjang alasnya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

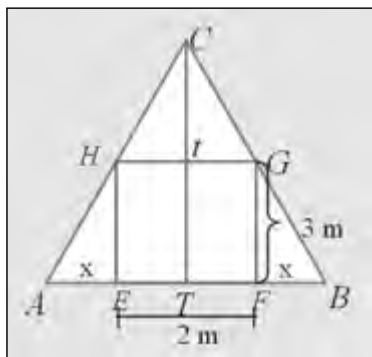
Luas penampang atap bagian depan 12 m^2

Ukuran persegi panjang tempat ornamen adalah $3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$

Ditanya:

- Panjang alas penampang atap
- Tinggi atap

Kamu ilustrasikan masalah di atas seperti gambar berikut!



- Memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut.

Gambar 7.2 Penampang Atap Bagian atas

Kamu cermati segitiga sama kaki ABC dan lakukan hal berikut.

Misalkan panjang $AE = FB = x$ m.

Karena penampang atap rumah berbentuk segitiga sama kaki, maka

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{panjang alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (AE + EF + FB) \times t$$

$$12 = \frac{1}{2} t(x + 2 + x)$$

$$12 = t(1 + x) \dots\dots\dots (1)$$

Perhatikan segitiga CTB dan segitiga GFB . Kedua segitiga tersebut sebangun.

$$\frac{GT}{GF} = \frac{TB}{FB} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1+x}{x}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3+3x}{x} \dots\dots\dots (2)$$

Substitusikan persamaan 2) ke persamaan 1) sehingga diperoleh

$$12 = \left(\frac{3+3x}{x}\right)(1+x) \Leftrightarrow 12x = (3+3x)(1+x)$$

$$\Rightarrow 12x = 3 + 3x + 3x + 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 12x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (3). Berdasarkan persamaan (3) akan ditentukan nilai-nilai x .

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

• Apa makna dari $a \times b = 0$ dan apa kaitannya dengan $(x - 1)(x - 1) = 0$

Dengan menggunakan nilai x akan ditentukan nilai t .

Untuk $x = 1$ diperoleh $t = \frac{3 - 3x}{x} = 6$.

Sehingga diperoleh panjang alas dan tinggi penampang atap rumah adalah 4 m dan 6 m.

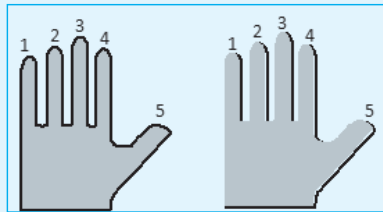
Sering kita temui orang tua yang sudah lanjut usia, mampu menghitung harga telur (banyak telur, cukup banyak) tanpa menggunakan kalkulator dengan waktu cukup singkat. Sementara orang tua tersebut tidak pernah menduduki jenjang pendidikan. Ternyata mereka memiliki warisan dari leluhur cara menjumlahkan dan mengalikan bilangan. Agar kamu mengetahuinya, gunakan jari tanganmu dan pecahkan Masalah 7.2 berikut.



Masalah-7.2

Nenek moyang salah satu suku di Indonesia dalam melakukan operasi hitung penjumlahan dan perkalian mereka menggunakan basis lima dengan fakta bahwa banyak jari tangan kiri atau kanan adalah lima. Coba bantu temukan aturan perkalian untuk menentukan hasil kali bilangan x dan y dengan

- a. $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$
- b. $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$



Gambar 7.3 Jari Tangan

Sebelum menemukan aturan perkalian bilangan-bilangan yang dibatasi pada bagian a) dan b), coba pilih dua bilangan x dan y , $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$ (misalnya, 6×8). Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan 6 di jari tangan kiri dan bilangan 8 di jari tangan kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

- 1) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan x di tangan kiri, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
- 2) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan y di tangan kanan, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
- 3) Berapa jumlah banyak jari yang terpakai pada tangan kiri dan banyak jari yang terpakai pada tangan kanan pada saat pencacahan kedua kali?
- 4) Berapa hasil kali jumlah jari yang terpakai di tangan kiri dan jari di tangan kanan dengan hasil pada langkah 3)?
- 5) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri saat pencacahan kedua kali ?
- 6) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan saat pencacahan kedua kali?
- 7) Berapa hasil kali bilangan pada langkah 5) dan 6)?
- 8) Berapa hasil jumlah bilangan pada langkah 4) dan 7)

Berdasarkan 8 langkah penentuan hasil perkalian bilangan x dan y , bekerjasama dengan temanmu satu kelompok untuk menemukan aturan perkalian dua buah bilangan x dan y , $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: z adalah bilangan basis (dalam contoh = 5)

$$x = z + a, \quad a < z$$

$$y = z + b, \quad b < z$$

1. hitung $(a + b)$
2. hitung $(z + z) = 2z$
3. kalikan hasil langkah 1) dan 2), yaitu $(a + b) 2z$
4. hitung $(z - a)$
5. hitung $(z - b)$
6. kalikan hasil langkah 4) dan 5), yaitu $(z - a) (z - b)$
7. jumlahkan hasil langkah 3) dan 6), yaitu $(a + b) 2z + (z - a) (z - b)$
8. diperoleh $x \times y = (a + b) 2z + (z - a) (z - b)$, $5 < x, y < 10, x, y \in \mathbb{N}$

Untuk contoh di atas diperoleh

$$6 \times 8 = (a + b) 2z + (z - a)(z - b)$$

$$48 = 8z + (z - 1) (z - 3)$$

$$\therefore z^2 + 4z - 45 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Latihan 7.1

Cermati aturan perkalian pada bagian a) dan mencoba menemukan aturan perkalian bilangan pada bagian b). Awali kerja kamu dengan memilih dua bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in \mathbb{N}$. Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan x di jari tangan kiri dan bilangan y di jari tangan kanan.

Masalah-7.3

Pak Anas memiliki tambak ikan mas di hulu sungai yang berada di belakang rumahnya. Setiap pagi, ia pergi ke tambak tersebut naik perahu melalui sungai yang berada di belakang rumahnya. Dengan perahu memerlukan waktu 1 jam lebih lama menuju tambak dari pada pulangnya. Jika laju air sungai 4 km/jam dan jarak tambak dari rumah 6 km, berapa laju perahu dalam air yang tenang?



Gambar 7.4 Sungai

Ilustrasi masalah dapat dicermati pada gambar berikut.

Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan beberapa pertanyaan berikut.

- 1) Bagaimana kecepatan perahu saat menuju hulu sungai dan kecepatan perahu saat Pak Anas pulang?
- 2) Jika diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai ditujuan, apa yang dapat kamu simpulkan dari keadaan perahu?
- 3) Coba temukan bentuk perasamaan kuadrat dalam langkah pemecahan masalah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan V_a adalah kecepatan air sungai dengan $V_a = 4$ km/jam
 V_{hu} adalah kecepatan perahu ke hulu
 V_{hi} adalah kecepatan perahu saat pulang
 V_t adalah kecepatan perahu dalam air tenang
 t_1 adalah waktu yang diperlukan menuju Tambak
 t_2 adalah waktu yang digunakan menuju rumah (pulang)
 S adalah jarak tambak dari rumah Pak Anas

Bagaimana kecepatan perahu saat pergi ke hulu dan saat menuju hilir (pulang)?
 Kecepatan perahu saat menuju hulu sungai menentang kecepatan air dan saat Pak Anas pulang, kecepatan perahu searah dengan kecepatan air sungai mengalir. Sehingga, Jika dimisalkan $V_a = x$ km/jam maka
 $V_{hu} = x - 4$ dan $V_{hi} = x + 4$
 Diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan, berarti

$$x \neq -4 \text{ dan } x \neq 4.$$

$$t_1 - t_2 = \frac{S}{V_{hu}} - \frac{S}{V_{hi}} = 1$$

$$\frac{6}{x - 4} - \frac{6}{x + 4} = 1$$

$$6(x + 4) - 6(x - 4) = (x + 4)(x - 4)$$

$$6x + 24 - 6x + 24 = x^2 + 4x - 4x - 16$$

$$48 = x^2 - 16$$

$$\therefore x^2 - 64 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 64 = 0 &\Rightarrow (x - 8)(x + 8) = 0 \\
 &\Rightarrow x - 8 = 0 \text{ atau } x + 8 = 0 \\
 &\Rightarrow x = 8 \text{ atau } x = -8
 \end{aligned}$$

Kecepatan perahu di air tenang adalah $V_{at} = x = 8$ km/jam.

Nilai $x = -8$ tidak berlaku sebab kecepatan perahu bergerak maju selalu bernilai positif.

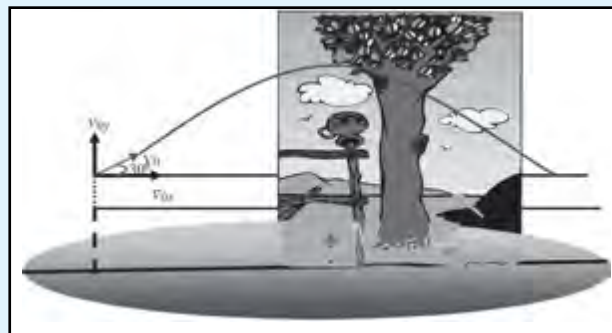
Kejadian dalam Masalah 7.4 yang akan dibahas, sering dialami oleh penggembala kerbau di tengah padang rumput yang penuh dengan pepohonan. Tentu kamu mengenal ketapel yang sering digunakan para petani untuk mengusir burung dikala padi sedang menguning. Mari kita temukan sebuah model matematika berupa persamaan kuadrat dari permasalahan berikut.



Masalah-7.4

Ronald anak Pak Sulaiman sedang asyik menunggang kerbau. Tiba-tiba ia melihat seekor burung yang berada di pohon dengan ketinggian 8m dari tanah. Ronald mengarahkan ketapelnya dengan sudut 30° , ternyata batu ketapel mengenai burung saat batu mencapai ketinggian maksimum. Berapa kecepatan batu bergerak? (gravitasi bumi = 10 m/det^2).

Ilustrasi masalah, dapat kamu cermati pada gambar di bawah ini.



Gambar 7.5 Posisi Burung di Pohon

Coba jelaskan pada temanmu pernyataan berikut.

Pada Sumbu- x , batu bergerak lurus beraturan, apa artinya?

Pada Sumbu- y , batu bergerak lurus berubah beraturan, apa artinya?

Renungkan beberapa pertanyaan berikut, agar kamu lebih mudah memecahkan masalah.

- 1) Bagaimana hubungan kecepatan anak ketapel bergerak menuju burung dengan kecepatan anak ketapel arah vertikal?
- 2) Saat batu mencapai ketinggian maksimum (h_{maks}) dan mengenai burung, Bagaimana kecepatan batu (V_{yP}) ?
- 3) Bagaimana menentukan ketinggian yang dicapai anak ketapel setiap detik? Bagaimana pengaruh gravitasi bumi dalam hal ini ?
- 4) Tentukan kecepatan anak ketapel dengan memanfaatkan apa yang diketahui dalam soal!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $h_{maks} = 8 \text{ m}$ dan $\alpha = 30^\circ$

$$V_{ox} = V_o \cos \alpha; V_{oy} = V_o \sin \alpha$$

Pada Sumbu- x , batu bergerak lurus beraturan

Pada Sumbu- y , batu bergerak lurus berubah beraturan

Saat batu mencapai ketinggian maksimum dan mengenai burung, $V_{yP} = 0$

$$V_{yP} = V_{0y} - gt \Rightarrow 0 = V_{0y} - gt$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_{0y}}{g}$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_o \sin \alpha}{g}$$

$$h_{\max} = V_{0y} t_{oP} - \frac{1}{2} g t_{oP}^2$$

$$= V_o \sin \alpha \frac{V_o \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_o \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(V_o \sin \alpha)^2}{g}$$

Untuk $h_{\max} = 8 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, dan $g = 10 \text{ m/det}^2$ diperoleh

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(V_o \sin \alpha)^2}{g} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \frac{(V_o \sin 30^\circ)^2}{10}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{4} V_o^2\right)}{10}$$

- Apa yang dimaksud ketinggian maksimum yang dicapai anak ketapel. Bagaimana kecepatan anak ketapel saat mencapai ketinggian maksimum

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{80} V_0^2$$

$$\therefore V_0^2 - 640 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$V_0^2 - 640 = 0 \Rightarrow (V_0 + \sqrt{640})(V_0 - \sqrt{640}) = 0$$

$$\Rightarrow (V_0 + \sqrt{640}) = 0 \text{ atau } (V_0 - \sqrt{640}) = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = -\sqrt{640} \text{ atau } V_0 = \sqrt{640}$$

$$\Rightarrow V_0 = -8\sqrt{10} \text{ atau } V_0 = 8\sqrt{10}$$

Jadi kecepatan batu (anak) ketapel meluncur adalah $V_0 = 8\sqrt{10}$ m/det.

• Bagaimana untuk $V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det, apakah berlaku?

$V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det tidak berlaku sebab kecepatan anak ketapel bergerak arah ke atas (positif).

• Temukan persamaan kuadrat pada langkah pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4

• $x^2 - 2x + 1 = 0$

• $z^2 + 4z - 45 = 0$

• $3z^2 + 2z - 85 = 0$

• $x^2 - 64 = 0$

• $v_0^2 - 640 = 0$

• Tuliskan ciri-ciri dari persamaan kuadrat secara individual dan diskusikan dengan teman secara klasikal.

Ciri-ciri persamaan kuadrat.

- Sebuah persamaan
- Pangkat tertinggi peubahnya adalah 2 dan pangkat terendah adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2, tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

Berdasarkan ciri-ciri persamaan kuadrat di atas, coba kamu tuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katamu sendiri dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan didefinisi berikut.



Definisi 7.1

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a , b , dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah

a adalah koefisien dari x^2

b adalah koefisien dari x

c adalah konstanta persamaan



Contoh 7.1

Persamaan $2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat sebab persamaan $2x + 5 = 0$ dapat dibentuk menjadi persamaan $0x^2 + 2x + 5 = 0$, tetapi koefisien x^2 adalah nol. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $2x + 5 = 0$ tidak memenuhi syarat Definisi 7.1, sebab koefisien x^2 adalah 0. Persamaan $2x + 5 = 0$ adalah persamaan linear satu peubah.



Contoh 7.2

Sebuah bola bergerak dari ketinggian h m. Ketinggian bola dari tanah untuk setiap detiknya ditentukan fungsi waktu $h(t) = 20t - 5t^2$. Saat bola tiba di atas tanah, apa yang kamu temukan?

Penyelesaian

Saat bola tiba di atas tanah, $h(t) = 0$.

$$h(t) = 0 \Rightarrow h(t) = 20t - 5t^2 = 0.$$

Persamaan $20t - 5t^2 = 0$ termasuk persamaan kuadrat sebab persamaan $20t - 5t^2 = 0$ dapat ditulis menjadi $-5t^2 + 20t + 0 = 0$, dengan koefisien $a = -5 \neq 0$, $b = 20$ dan $c = 0$. Berdasarkan Definisi 7.1 persamaan $20t - 5t^2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan satu variabel, yaitu t .

Contoh 7.3

Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat satu peubah sebab persamaan tersebut memuat dua peubah, yaitu x dan y .

Latihan 7.2

Di depan sebuah sekolah akan dibangun lapangan bola basket. Tanah kosong yang tersedia berukuran $60 \text{ m} \times 30 \text{ m}$. Karena dana terbatas, maka luas lapangan yang direncanakan adalah 1000 m^2 . Untuk memperoleh luas yang diinginkan, ukuran panjang tanah dikurangi $x \text{ m}$ dan ukuran lebar dikurangi $x \text{ m}$. Dapatkah kamu menemukan sebuah persamaan kuadrat dari masalah ini?



Uji Kompetensi 7.1

1. Apakah persamaan yang diberikan merupakan persamaan kuadrat? Berikan alasanmu!
 - a. $x^2y = 0, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.
 - b. $x + \frac{1}{x} = 0, x \neq 0$.
2. Robert berangkat kesekolah mengendarai sepeda. Jarak sekolah dari rumahnya 12 km . Robert berangkat dengan kecepatan awal sepeda bergerak 7 km/jam . Karena Robert semakin lelah, kecepatan sepedanya mengalami perlambatan 2 km/jam . Berapa lama waktu yang digunakan Robert sampai di sekolah.
3. Pada sebuah kerucut lingkaran tegak diketahui bahwa: penambahan volume karena jari-jarinya bertambah sepanjang 24 cm sama dengan penambahan volume karena tingginya bertambah 24 cm . Jika tinggi semula kerucut 3 cm , berapakah jari-jari kerucut semula?
 4. Dua buah jenis printer komputer akan digunakan untuk mencetak satu set buku. Jenis printer pertama, $\frac{1}{x}$ jam lebih cepat dari jenis printer kedua untuk menyelesaikan cetakan satu set buku. Jika kedua jenis printer digunakan sekaligus, maka waktu yang digunakan untuk mencetak satu set buku adalah 4 jam . Berapa waktu yang dibutuhkan printer jenis kedua untuk mencetak satu set buku.

5. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah. . .
6. Jika $a^3 + b^3 = 637$ dan $a + b = 13$, maka nilai dari $(a-b)^2$ adalah. . .
7. Bentuk faktorisasi dari $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$ adalah. . .
8. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka nilai $\left[a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^2$



Projek

Rancanglah minimal dua masalah nyata di lingkungan sekitarmu yang terkait dengan persamaan kuadrat dan berilah penyelesaian kedua masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

b. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara (aturan) menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut seluruhnya diturunkan dari konsep (Definisi-7.1) yang telah kita temukan. Aturan tersebut antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus ABC. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat. Agar lebih terarah pembahasannya, mari kita coba memecahkan masalah-masalah yang diberikan.

1) Cara Pemfaktoran

Latihan 7.3

Temukan pola atau aturan memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan menemukan rumus ABC berdasarkan konsep persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akarnya (harga-harga x yang memenuhi persamaan).

Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif pahami beberapa pertanyaan berikut!

- a) Apa yang dimaksud dengan memfaktorkan? Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Nilai x dapat kita tentukan dengan cara

pemfaktoran. Cara pemfaktoran dapat kita lakukan dengan memperhatikan koefisien x^2 , x , dan konstanta c .

- b) Ada berapa kasus yang dapat kamu pilih agar pemfaktoran persamaan kuadrat dapat terwakili seluruhnya.

Contoh 7.4

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3z^2 + 2z - 85 = 0$ dengan cara pemfaktoran.

Penyelesaian

$$3z^2 + 2z - 85 = \frac{1}{3}(9z^2 + 6z - 255) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(9z^2 + 3(17 - 15)z + (17 \times (-15))) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((9z^2 + 51z) - (45z + 255)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((3z + 17)3z - 15(3z + 17)) = 0$$

$$\Rightarrow (3z + 17)(3z - 15) = 0 \text{ atau } (3z + 17)(z - 5) = 0$$

Harga-harga z yang memenuhi adalah $z = \frac{-17}{3}$ atau $z = 5$. Sehingga himpunan penye-

lesaian persamaan $3z^2 + 2z - 85 = 0$ adalah $\left\{\frac{-17}{3}, 5\right\}$.

$$\begin{aligned} m &= 17 \\ n &= -15 \\ m + n &= 2 = b \\ m \times n &= -255 = ac \end{aligned}$$

2) Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Untuk menemukan aturan penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna cermati beberapa pertanyaan berikut.

- Apa yang dimaksud melengkapkan kuadrat sempurna?
- Apakah kamu masih ingat pelajaran di SMP bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
- Dapatkah kamu membentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dalam bentuk $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
- Apakah seluruh bentuk persamaan kuadrat dapat ditentukan akarnya dengan teknik kuadrat sempurna?

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Untuk $a = 1$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}b\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}, \text{ jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}, \text{ jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

3) Menggunakan Rumus ABC

Masih ingatkah kamu rumus abc waktu belajar persamaan kuadrat di SMP? Darimana rumus itu diturunkan? Bagaimana cara menemukannya?. Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

- Dapatkah kamu membagi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan koefisien a ? mengapa?
- Setelah kamu membagi persamaan dengan koefisien a , dapatkah kamu melakukan manipulasi aljabar untuk mendapatkan bentuk kuadrat sempurna?
- Bagaimana memanipulasi dan menyederhanakan persamaan agar diperoleh nilai x_1 dan x_2 ?
- Akar persamaan kuadrat adalah dua bilangan, dapatkah kamu membedakan jenis akar-akar itu dari segi jenis bilangannya dan nilainya? Apa yang membedakan akar-akar tersebut?
- Temukanlah jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat dilihat dari nilai diskriminan.

Berdasarkan Definisi-7.1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)} \\
&\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \\
&\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Sifat-1

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b , dan c bilangan real dan $a \neq 0$, maka akar-akar persamaan tersebut adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

c. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Hasil Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar sebuah persamaan kuadrat dapat dijumlahkan atau dikalikan. Bagaimana menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar dan kaitannya dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat tersebut? Untuk itu selesaikanlah masalah berikut.

Temukan aturan (rumus) menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat!

Selesaikanlah masalah di atas, lakukan tugas bersama temanmu satu kelompok. Beberapa pertanyaan yang kamu harus cermati untuk menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat antara lain:

- Dapatkah kamu menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan aturan yang sudah kamu miliki? Aturan mana yang kamu pilih dari tiga cara di atas terkait dengan menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat?
- Bagaimana syarat menjumlahkan dan mengalikan dua bentuk akar?
- Dapatkah kamu menyatakan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dalam koefisien-koefisien persamaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan rumus ABC di atas, akar-akar persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- a. Jumlah Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

- b. Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Berdasarkan kedua rumus di atas, disimpulkan

Sifat-2

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan akar-akar x_1 dan x_2 , maka diperoleh

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

d. Persamaan Kuadrat Dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 , maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Sehingga permasalahan kita saat ini adalah sebagai berikut.

Temukan aturan untuk menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 .

Selesaikanlah masalah di atas, lakukan bersama temanmu satu kelompok. Agar pekerjaan kamu lebih efektif pahami beberapa pertanyaan berikut

- Bagaimana kamu akan mengkonstruksi sebuah persamaan kuadrat dengan akar-akar yang diberikan?
- Apa keterkaitan rumus hasil jumlah dan rumus hasil kali akar-akar yang diberikan?

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Berdasarkan definisi-1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0 \end{aligned}$$

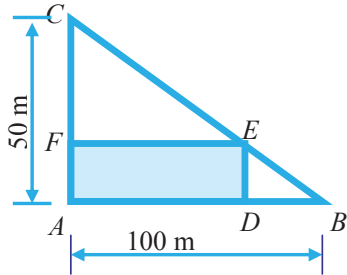
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Sifat-3

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.



Uji Kompetensi 7.2

- Persamaan $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real. Tentukan nilai m yang memenuhi!
- Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa
 - $\alpha^4 + \beta^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
 - $(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$
- Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah p dan q . Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(p + 2)$ dan $(q + 2)$!
- Dua buah jenis mesin penggiling padi digunakan untuk menggiling satu peti padi. Untuk menggiling satu peti padi, mesin jenis pertama lebih cepat $\frac{1}{2}$ jam dari mesin jenis kedua. Sementara jika kedua mesin digunakan sekaligus, dapat menggiling satu peti padi selama 6 jam.
 - Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis pertama untuk menggiling satu peti padi.
 - Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis kedua untuk menggiling satu peti padi.
- Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah
- Pada sebidang tanah akan didirikan sebuah sekolah SD. Bentuk tanah dan ukuran tanah dapat dilihat pada gambar.
 

7. $\frac{x}{x^2+3x+1} = a$, nilai dari $\frac{x^2}{x^4+3x^2+1} = \dots$

8. Jika $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} + \sqrt{2009x^2 - 11x + 96} = 16$ maka :
 nilai yang mungkin untuk $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} - \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$ adalah ...

9. Hasil pemfaktoran dari : $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 16$ adalah



Projek

Himpunlah informasi penggunaan sifat-sifat dan aturan yang berlaku pada persamaan kuadrat di bidang ekonomi, fisika, dan teknik bangunan. Kamu dapat mencari informasi tersebut dengan menggunakan internet, buku-buku dan sumber lain yang relevan. Temukan berbagai masalah dan pemecahannya menggunakan aturan dan sifat-sifat akar persamaan kuadrat. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

2. FUNGSI KUADRAT

a. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu pada fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep fungsi kuadrat dapat ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.



Masalah-7.5

Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya s dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah 10 m/det^2).



Gambar 7.6 Sumber Air Bersih

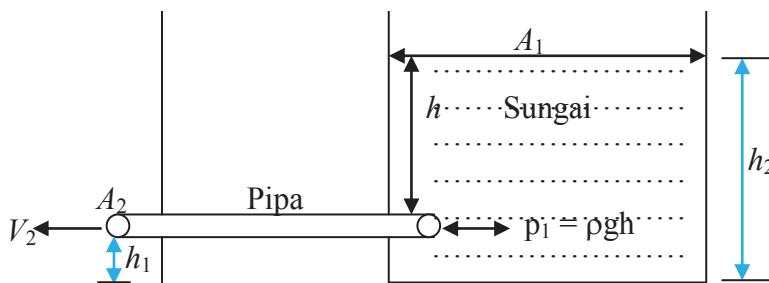
Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam Gambar 7.6. Gunakan variabel

untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan.

Beberapa pertanyaan yang harus kamu pahami untuk dapat memecahkan masalah dengan baik antara lain sebagai berikut.

- 1) Apa yang terjadi jika luas permukaan sungai jauh lebih luas dari luas permukaan pipa?
- 2) Bagaimana tekanan air pada pangkal pipa di ujung pipa serta aturan apa yang terkait dengan keadaan tersebut?
- 3) Dapatkah kamu menentukan kecepatan air yang keluar dari mulut pipa menggunakan aturan pada pertanyaan 2)?
- 4) Dapatkah kamu menentukan besarnya debit air yang mengalir dari pipa dengan menggunakan rumus debit zat cair, saat kamu belajar di SD?
- 5) Apa keterkaitan luas penampang pipa dengan kecepatan air mengalir?

Alternatif Penyelesaian



Gambar 7.7 Ilustrasi Posisi Pipa di Dalam Sungai

Misalkan:

p_1 adalah tekanan air pada mulut pipa

p_2 adalah tekanan air pada ujung pipa

h adalah kedalaman pipa di bawah permukaan air sungai = 1 m

h_1 adalah ketinggian pipa dari permukaan tanah

h_2 adalah ketinggian permukaan air sungai

V_1 adalah kecepatan air sungai mengalir

V_2 adalah kecepatan air mengalir dari ujung pipa

A_1 adalah penampang permukaan air sungai

A_2 adalah penampang permukaan ujung pipa

g adalah gravitasi bumi = 10 m/det².

- Apa yang terjadi jika A_1 jauh lebih luas dari A_2 . Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.

Jika $A_1 \gg A_2$ maka $V_1 \ll V_2$, akibatnya V_1 menuju 0 (nol).

Karena tekanan air pada pangkal pipa dan diujung pipa sama maka berdasarkan gambar di atas diperoleh persamaan

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad (\text{karena } V_1^2 \text{ menuju nol})$$

$$gh = \frac{1}{2} V_2^2 \quad (\text{karena } h = h_1 - h_2)$$

$$2gh = V_2^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

∴ Kecepatan air mengalir dari pipa adalah $V = \sqrt{2gh}$

Debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah volume air yang mengalir persatuan waktu.

$$q = \frac{\text{volume}}{\text{waktu}}$$

$$= \frac{A \times S}{t}$$

$$= A \times V.$$

$$q = \left(\frac{1}{4} \pi d^2\right) (\sqrt{2gh}) \quad (\text{penampang pipa berbentuk lingkaran, luas penampang pipa adalah } A) = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2, \quad (d \text{ adalah diameter pipa})$$

Debit air yang mengalir dari pipa dinyatakan dalam fungsi berikut

$$\therefore q(d) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4} \pi\right) d^2, \quad d \in R, \quad d \geq 0$$

Kain tenun yang berasal dari Sumatera Barat atau yang lebih dikenal

dengan songket Minangkabau merupakan suatu hasil karya tradisional yang perlu dipertahankan. Kekayaan motifnya ternyata juga memiliki arti dan nilai kebersamaan tersendiri. Adapun jenis-jenis motif dari kain songket Minangkabau tersebut diantaranya adalah motif Pucuk Rabuang, motif Itiak Pulang Patang, motif Kaluak Paku, dan yang lainnya. Motif Kaluak Paku misalnya memiliki makna bahwa kita sebagai manusia haruslah mawas diri sejak kecil dan perlu belajar sejak dini mulai dari keluarga. Pendidikan dalam keluarga menjadi bekal utama untuk menjalankan kehidupan di masyarakat. Setelah dewasa kita harus bergaul ke tengah masyarakat, sehingga bekal hidup dari keluarga bisa menjadikan diri lebih kuat dan tidak mudah terpengaruh hal negatif. Selain itu juga, motif Kaluak Paku juga memiliki makna lainnya, yaitu seorang pemimpin harus mampu menjadi teladan bagi masyarakat yang ada disekitarnya. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Sekarang mari kita perhatikan salah satu jenis kain songket yaitu kain songket motif Kaluak Paku, dalam hal ini kita jadikan bahan inspirasi mengangkat masalah matematika terkait fungsi kuadrat.



Masalah-7.6



Gambar 7.8 Kain Songket

Sebuah kain songket dengan ukuran panjang $\frac{9}{4}$ m dan lebar $\frac{3}{4}$ m. Di bagian tengah terdapat 5 bagian daerah yang luas seluruhnya $\frac{451}{400}$ m. Tentukan ukuran bagian kain songket yang berwarna merah dan daerah berambu benang.

- Coba sendiri!

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga dapat terpecahkan.

Cermatilah beberapa pertanyaan yang mengarahkan kamu bekerja lebih efektif.

- 1) Berbentuk apakah daerah bagian dalam kain songket. Bagaimana kamu menentukan luas daerah tersebut?
- 2) Apakah ada keterkaitan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk menentukan

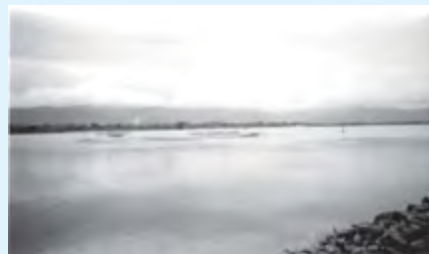
ukuran daerah bagian dalam kain songket?

Kenyataan hidup terkadang berbeda dengan apa yang kita harapkan. Seperti Pak Ketut yang memiliki Ijazah Sarjana Pertanian telah lama dan berulang kali melamar pekerjaan di kota Jakarta. Ternyata, Ia belum beruntung memanfaatkan ijazahnya sampai saat ini. Akhirnya, Ia kembali ke Pulau Dewata dan berencana membuat keramba ikan Gurami dan Udang. Tetapi, Ia mendapat masalah sebagai berikut.



Masalah-7.7

Pak Ketut memiliki jaring jala sepanjang 60 m. Ia ingin membuat keramba ikan gurami dan udang. Kedua keramba ikan dibuat berdampingan, seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 7.9 Keramba Ikan Gurami dan Udang

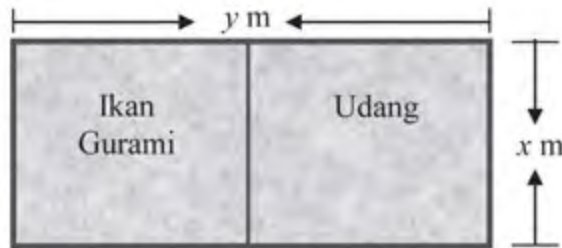
Misalkan panjang keramba y m dan lebarnya x m, serta kelilingnya keramba k m. Tentukanlah ukuran keramba agar luasnya maksimum!

Coba amati gambar keramba yang diinginkan dan renungkan beberapa pertanyaan berikut.

- 1) Bagaimana bentuk keramba yang direncanakan Pak Ketut?
- 2) Adakah konsep dan prinsip matematika yang terkait untuk menentukan panjang keliling permukaan keramba?
- 3) Adakah konsep dan prinsip matematika untuk menentukan luas daerah permukaan keramba ?
- 4) Bagaimana menentukan ukuran panjang dan lebar permukaan keramba agar luasnya maksimum dengan jaring jala yang tersedia?

Alternatif Penyelesaian

Penampang permukaan keramba dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.10 Posisi Tambak

Karena panjang jaring jala yang tersedia adalah 60 m maka keliling keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$K = 2y + 3x = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \Rightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Luas keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$L = \text{panjang} \times \text{lebar}$$

$$L = y \times x$$

$$y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow L = y \times x \Rightarrow L = \left(30 - \frac{3}{2}x\right)x$$

$$\Rightarrow L = 30x - x^2$$

Karena luas permukaan keramba tergantung nilai x maka persamaan fungsi luas dapat dinyatakan sebagai berikut.

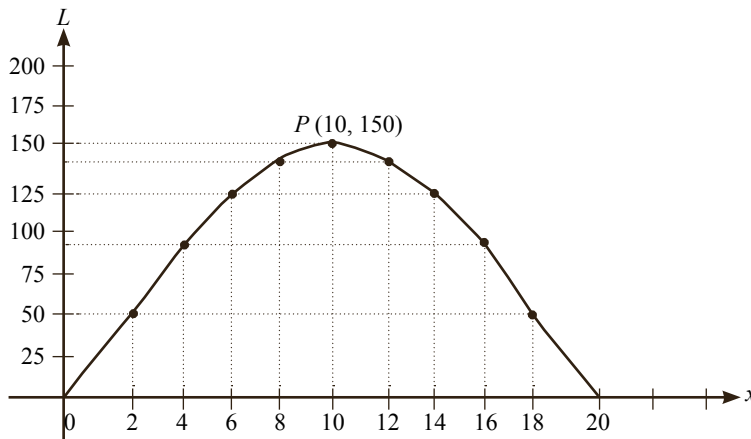
$$\therefore L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2, x \in R, x \geq 0$$

Dengan mengambil beberapa harga x , diperoleh beberapa harga L dan disajikan pada tabel berikut

Tabel 7.1 Nilai L dengan x merupakan bilangan bulat genap positif

Nilai x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nilai L	0	54	96	126	144	150	144	126	96	54	0

Sekarang mari kita gambarkan grafik fungsi $L(x) = 30x - x^2$ pada bidang koordinat dengan bantuan nilai-nilai x dan L yang ada pada tabel di atas.



Gambar 7.11 Grafik Fungsi Kuadrat

Coba cermati harga-harga x dan L di dalam Tabel 7.1 dan grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2$, $x \geq 0$ memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

- Kurva terbuka ke bawah
- Grafik memotong sumbu- x pada dua titik yang berbeda yaitu titik $(0, 0)$ dan titik $(20, 0)$.
- Grafik fungsi mencapai puncak pada titik $(10, 150)$.
- Garis $x = 10$ membagi dua luas (sama besar) daerah di bawah kurva, sehingga garis $x = 10$ dapat dikatakan sebagai sumbu simetri grafik fungsi

$$L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2.$$

Berdasarkan grafik fungsi di atas, luas maksimum diperoleh saat lebar dan panjang permukaan keramba ikan, yaitu $x = 10$ m dan $y = 15$ m

$$x = 10 \text{ m dan } y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 15 \text{ m}$$

Luas maksimum permukaan keramba ikan adalah $L = 150 \text{ m}^2$

Perhatikan kembali setiap langkah pemecahan Masalah 7.5, 7.6, dan Masalah 7.7. Masih ingatkah kamu contoh fungsi kuadrat ketika belajar di SMP. Coba temukan model-model matematika dari setiap permasalahan yang merupakan fungsi kuadrat. Kemudian coba temukan ciri-ciri dari fungsi itu dan tuliskan konsep (pengertian) fungsi kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang kamu ditemukan, serta hasilnya diskusikan dengan temanmu.



Definisi 7.2

Fungsi kuadrat dalam x adalah suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

$f: A \rightarrow B$, dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Dengan : x adalah variabel bebas atau peubah bebas
 a adalah koefisien dari x^2
 b adalah koefisien dari x
 c adalah konstanta persamaan
 $f(x)$ adalah nilai fungsi yang tergantung pada nilai variabel x .

Selanjutnya ujlilah beberapa fungsi berikut, apakah merupakan fungsi kuadrat?

Latihan 7.4

Apakah fungsi berikut merupakan fungsi kuadrat?

- Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi $g: A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c, \forall x \in A, c \in B$.
- Didefinisikan $h(t) = (t - 2)^2, t \in R$, apakah h merupakan fungsi kuadrat?
- Misalkan himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \in R\}$
 $B = \{y \mid -8 \leq y < 20, y \in R\}$

Didefinisikan $f: A \rightarrow B$

$$f: x \rightarrow x^3, \forall x \in A$$

- Misalkan himpunan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in R\}$ dan $B = \{y \mid 8 \leq y \leq 26, \forall y \in R\}$

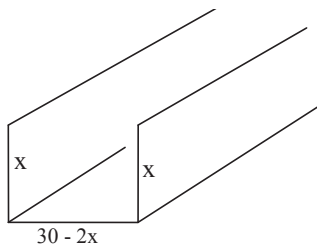
Didefinisikan $f: A \rightarrow B$, dengan

$$f(x) = x^2 + 3x + 8, \forall x \in A$$



Uji Kompetensi 7.3

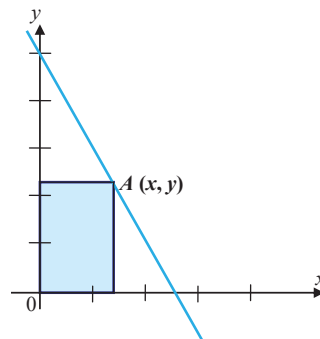
1. Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat Talang Air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah Talang Air dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada Gambar di bawah ini.



Bantulah Pak Suradi menentukan ukuran x agar volume air yang tertampung maksimal.

2. Titik $A(x, y)$ terletak pada garis g dengan persamaan $2x + y = 10$. Dari titik A dibuat garis-garis tegak lurus

terhadap Sumbu- x dan Sumbu- y sehingga terbentuk persegi panjang dengan diagonal OA . Perhatikan gambar berikut!



- a) Jika L menyatakan luas daerah persegi panjang yang terbentuk, nyatakanlah L sebagai fungsi x .
- b) Apakah L sebagai fungsi merupakan fungsi kuadrat dalam x ?



Projek

Rancanglah permasalahan terkait gerakan peluru dan ekonomi yang menerapkan konsep dan aturan fungsi kuadrat. Buatlah pemecahan masalah tersebut dalam sebuah laporan serta sajikan di depan kelas.

b. Grafik Fungsi Kuadrat

Dari hasil pemecahan Masalah 7.8, kita telah peroleh persamaan fungsi kuadrat yang menyatakan besar debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah $q(d) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) d^2$, $d \in R$, $d \geq 0$. Misalkan ukuran diameter pipa adalah x dan besar debit air yang mengalir adalah y . Berarti y dapat dinyatakan dalam x , yaitu $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$.

Temukan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$.

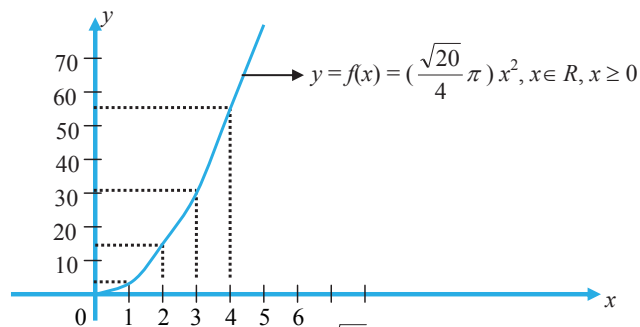
Beberapa pertanyaan arahan yang perlu kamu cermati untuk memperoleh grafik fungsi $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$.

- 1) Pikirkan apa saja yang kamu butuhkan untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ dan ingat kembali bagaimana menggambar grafik fungsi kuadrat di SMP.
 - 2) Apa perbedaan fungsi kuadrat $f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ dengan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$
 - 3) Apa kaitan konsep pencerminan dengan masalah ini?
 - 4) Bagaimana komponen-komponen grafik fungsi setelah dicerminkan?
 - 5) Dapatkah kamu memberikan perbedaan kedua grafik fungsi kuadrat tersebut?
 - 6) Bilamana grafik memotong sumbu x dan memotong sumbu y ?
- Ingat kembali, bagaimana menggambarkan grafik persamaan fungsi kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik persamaan fungsi kuadrat yang baru.

Perhatikan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$, yang menyatakan besarnya debit air yang mengalir dari pipa. Besarnya debit air yang mengalir dari pipa tergantung besarnya ukuran diameter (x) pipa. Jika $x = 0$, maka debit air adalah $y = f(x) = f(0) = 0$. Untuk beberapa nilai x diberikan, diperoleh nilai $y = f(x)$ disajikan dalam tabel berikut.

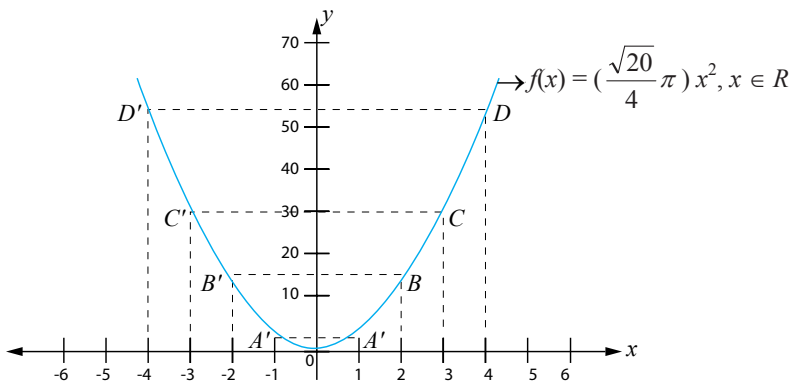
x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	3,51	14,04	31,6	56,17

Grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.12: Grafik fungsi $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$.

Dengan mencerminkan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ terhadap Sumbu- y , maka diperoleh sebuah parabola berikut.



Gambar 7.13: Grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2, x \in R$

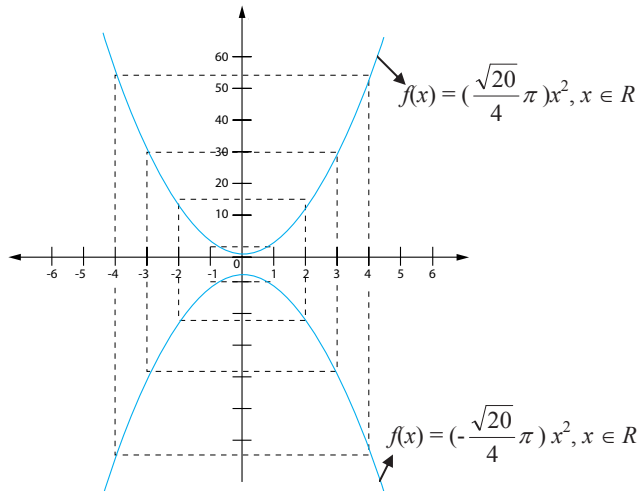
Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2, x \in R$ dan parabola di atas adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = \frac{\sqrt{20}}{4}\pi > 0$
- Kurva terbuka ke atas
- Memiliki titik puncak (titik balik minimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $x = 0$ dan nilai minimum $y = f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x pada titik O(0, 0)
- Cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2, x \in R$ terhadap

Sumbu-x dan selidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan.

Kita cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2, x \in R$ terhadap Sumbu-x atau garis $y = 0$. Dengan mengingat kembali sifat-sifat pencerminan bahwa arah benda dengan bayangannya selalu berlawanan arah. Sehingga nilai fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2, x \in R$ berubah dari bernilai positif menjadi negatif. Perubahan tersebut diikuti perubahan fungsinya dari $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2$

$x^2, x \in R$ menjadi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$. Secara lengkap bayangan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x)$ setelah dicerminkan terhadap Sumbu- x adalah sebagai berikut.



Gambar 7.14: Grafik fungsi $f(x)$ dan grafik pencerminan $f(x)$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ dan parabola hasil pencerminan terhadap sumbu- x (Gambar-7.14) adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = -\frac{\sqrt{20}}{4}\pi < 0$
- Kurva terbuka ke bawah
- Memiliki titik puncak (titik balik maksimum) di titik $O(0, 0)$
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $y = 0$ dan nilai minimum $f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung Sumbu x pada titik $O(0, 0)$

Apa kesimpulan dari hasil pencerminan tersebut?

Kesimpulan

Misalkan $g(x) = ax^2, x \in R$, jika dicerminkan terhadap Sumbu- x maka diperoleh $g^*(x) = -ax^2, x \in R$ dengan sumbu simetri adalah Sumbu- y dan memiliki titik puncak $O(0, 0)$.



Masalah-7.8

Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

- Temukan persamaan garis simetri (sumbu simetri) dan titik puncak grafik fungsi kuadrat tersebut.
- Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2, x \in R, a \neq 0$.
- Temukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y .
- Temukan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ terkait nilai koefisien a dan titik puncak parabola.

Untuk memecahkan masalah di atas, cermati beberapa grafik fungsi kuadrat yang telah digambar sebelumnya dan beberapa pertanyaan berikut:

- 1) Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi kuadrat?
- 2) Apa yang dimaksud dengan persamaan garis sumbu simetris grafik fungsi kuadrat?
- 3) Apa yang dimaksud dengan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
- 4) Bagaimana menemukan aturan penentuan persamaan garis simetris dan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
- 5) Apa yang dimaksud dengan transformasi geser ?.
- 6) Apa kaitan transformasi geser dan sifat-sifatnya untuk memperoleh sebarang grafik fungsi kuadrat dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2, x \in R$, dan $a \neq 0$?
- 7) Temukan arah pergeseran grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2, x \in R$ untuk mendapatkan grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ dan syarat-syarat yang diperlukan!

8) Sifat-sifat apa saja yang kamu simpulkan dari grafik fungsi kuadrat

$$f(x) = a \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right)^2 + \left(\frac{-D}{4a} \right), \text{ dengan } a, b, c \text{ adalah bilangan real dan } a \neq 0$$

berkaitan dengan nilai koefisien a dan titik puncak grafik fungsi?

9) Dapatkah kamu memberi beberapa kemungkinan gambaran grafik fungsi kuadrat terkait nilai koefisien a , nilai diskriminan, titik potong terhadap sumbu- x , nilai fungsinya.

Berdasarkan Definisi 7.2, bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \Rightarrow f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right), a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right), a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right], a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right), a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right)^2 + \left(\frac{-D}{4a} \right), a \neq 0$$

Misalkan $g(x) = ax^2, x \in R, a \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right)^2 + \left(\frac{-D}{4a} \right), a \neq 0 \\ \text{dan } g(x) = ax^2, x \in R \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right) + \left(\frac{-D}{4a} \right)$$

Grafik fungsi $f(x) = g \left(x - \left(\frac{-b}{2a} \right) \right) + \left(\frac{-D}{4a} \right)$ adalah grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2, x \in R$ yang digeser sejauh satuan ke arah Sumbu- x dan digeser sejauh satuan ke arah Sumbu- y .

Sifat-4

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, memiliki

- Persamaan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan
- Titik puncak $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Dari beberapa sajian grafik persamaan fungsi kuadrat sebelumnya turunkan sifat-sifat grafik persamaan fungsi kuadrat dan menyajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Dari fungsi kuadrat $f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a})$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat.

Sifat-5

Jika $a > 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b , dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum

$$P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}).$$

Sifat-6

Jika $a < 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b , dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke bawah dan memiliki titik balik maksimum

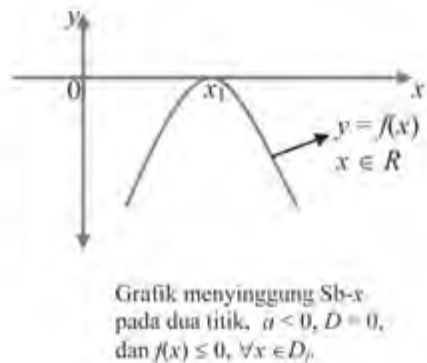
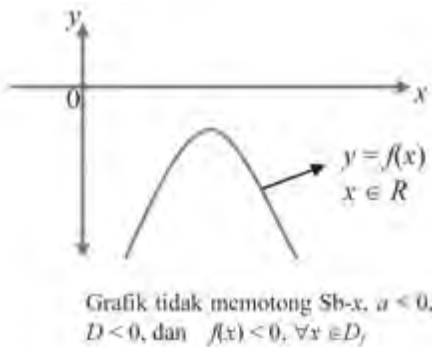
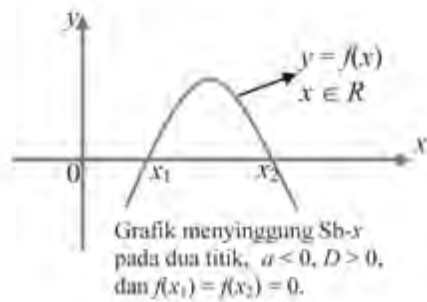
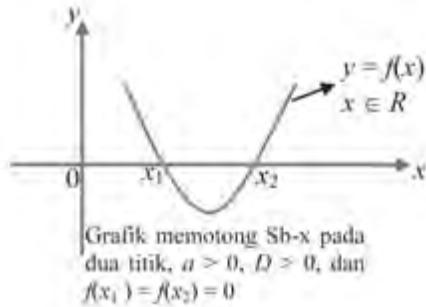
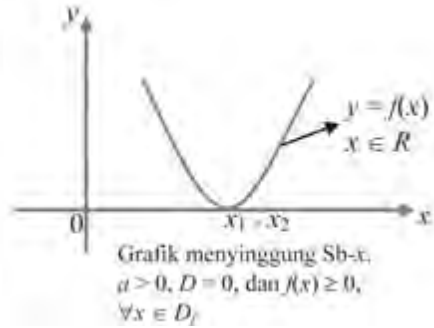
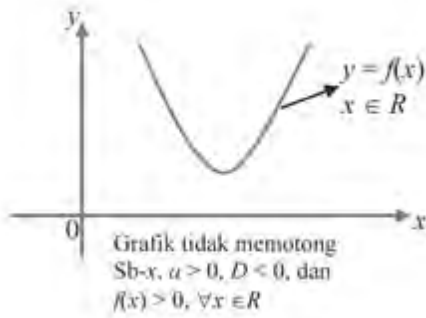
$$P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}).$$

Sifat-7

Grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Misal $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)

- Jika $D > 0$ maka grafik $y = f(x)$ memotong Sumbu- x pada dua titik berbeda
- Jika $D = 0$ maka grafik $y = f(x)$ menyinggung Sumbu- x pada satu titik
- Jika $D < 0$ maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong Sumbu- x

Pada gambar berikut diperlihatkan berbagai kemungkinan letak parabola terhadap Sumbu-x



c. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

Kita cermati konsep persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut.

- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.
- Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Latihan 7.5

Berdasarkan kedua konsep di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut

1. Apakah sebuah persamaan kuadrat dapat diperoleh dari sebuah fungsi kuadrat?
2. Jika disubstitusikan nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ke dalam persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ apa yang kamu dapatkan?
3. Dapatkah persamaan fungsi kuadrat dipandang sebuah persamaan kuadrat? Jelaskan.
4. Apa perbedaan konsep fungsi dengan konsep persamaan?

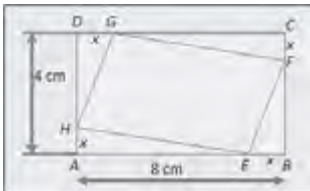
Sifat-8

Jika sebuah fungsi kuadrat diberi nilai k , dengan $k \in R$ maka diperoleh sebuah persamaan kuadrat.



Uji Kompetensi 7.4

1. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum -3 pada saat $x = 2$, sedangkan untuk $x = -2$ fungsi bernilai -11 . Tentukan fungsi kuadrat tersebut!
2. Tentukan luas minimum segi empat $EFGH$ di bawah ini!
3. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = 4x^2$!
4. Persegi $ABCD$ dengan panjang sisinya a cm. Pada sisi AB diberi titik E dengan panjang AE adalah x cm. Diantara sisi BC diberi titik F dengan panjang $BF = AE$. Panjang $EB = FC$. Tentukan luas minimum DEF !



5. Daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ adalah himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in R\}$. Tentukan daerah hasil fungsi f !
6. Gambarkanlah grafik fungsi kuadrat di bawah ini. (untuk setiap x bilangan real)
 - a. $f(x) = 3x^2 + 5x - 4, x \in R$.
 - b. $f(x) = -2x^2 - 3x + 7, x \in R$.



Projek

Rancanglah masalah nyata yang melibatkan grafik fungsi kuadrat pada bidang teknik bangunan dan fisika. Buatlah pemecahan masalah tersebut dengan menerapkan berbagai sifat grafik fungsi kuadrat yang telah kamu pelajari. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Telah kita temukan konsep dan aturan yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Beberapa hal yang penting sebagai pegangan kita untuk mendalami dan melanjutkan materi pada bahasan berikutnya, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Bentuk umum Persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.
2. Untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut.
 - a. Memfaktorkan.
 - b. Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.
 - c. Menggunakan Rumus abc .

Rumus abc adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat
Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, berhubungan erat dengan koefisien-koefisien a, b , dan c . Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Bentuk persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
5. Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat
Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagai bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.
 - a. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
 - b. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
 - c. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x .
 - d. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x .
 - e. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.
6. Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx$ adalah sebagai berikut
 - a. Menentukan titik potong dengan sumbu x , diperoleh jika $y = 0$.
 - b. Menentukan titik potong dengan sumbu y , diperoleh jika $x = 0$.
 - c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$.
 - d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$.
 - e. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right)$.

Kita telah menemukan berbagai konsep dan sifat-sifat yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Demikian juga, kita telah terapkan dalam berbagai pemecahan masalah nyata. Selanjutnya akan kita bahas tentang geometri terkait kedudukan titik, garis, sudut, dan bidang pada bidang datar dan ruang dimensi tiga. Penguasaan kamu pada materi pada setiap bahasan akan bermanfaat dalam mendalami materi selanjutnya.

Bab 8

Trigonometri

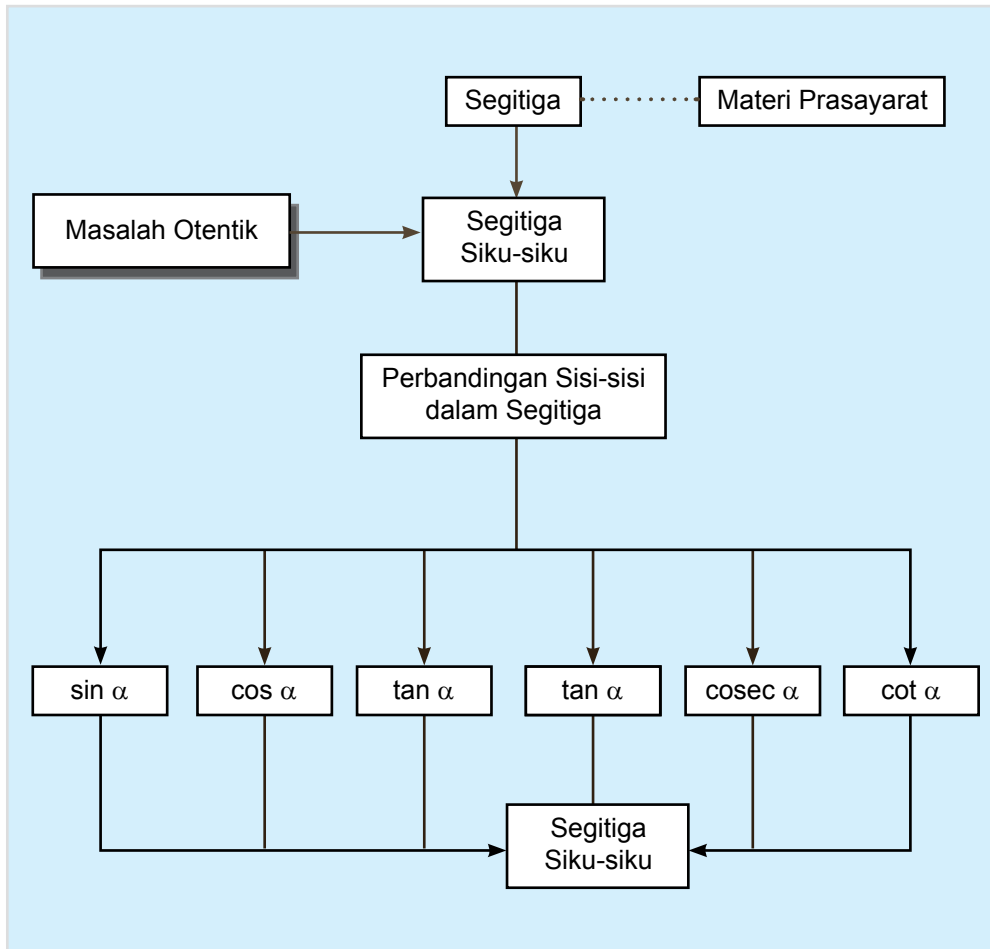
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis;3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari;4. memahami konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku melalui penyelidikan dan diskusi tentang hubungan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dalam beberapa segitiga siku-siku sebangun;5. menemukan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku;6. memahami dan menentukan hubungan perbandingan trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika.7. memahami konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri sudut-sudut istimewa.	<p>Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik;• berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur;• berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Sudut*
- *Derajat*
- *Radian*
- *Kuadran*
- *Perbandingan Sudut (Sinus, Cosinus, tangen, cotangen, cosecan, dan secan)*
- *Identitas trigonometri*

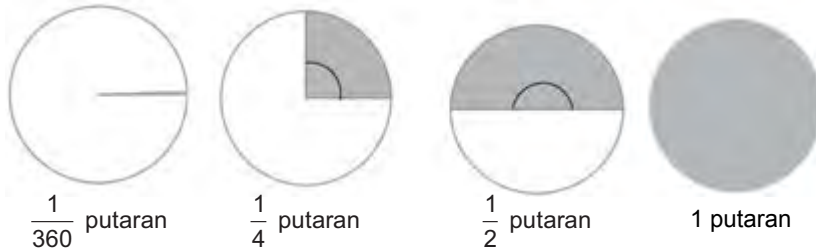
B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

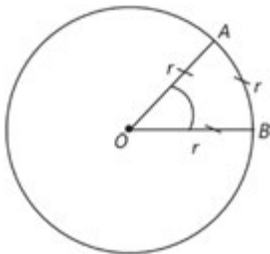
1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda “°” dan “rad” berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, putaran penuh = 360° , atau 1° didefinisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran penuh. Cermati gambar berikut ini!



Gambar 8.1 Deskripsi besar rotasi

Tentunya, dari Gambar 8.1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Sebelum kita memahami hubungan “derajat dengan radian”, mari kita pelajari teori mengenai radian.



Gambar 8.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 8.2.

Jika besar $\angle AOB = \alpha$, $\overline{AB} = OA = OB$, maka $\alpha = \frac{\overline{AB}}{r} = 1$ radian.

Jika panjang busur tidak sama dengan r , maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian diselesaikan menggunakan rumus perbandingan:



Definisi 8.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r} \text{ rad}$$

Lebih lanjut, hubungan satuan derajat dengan satuan radian, bahwa 1 putaran penuh sama dengan $2\pi \text{ rad}$. Seperti dinyatakan dalam definisi berikut



Definisi 8.2

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \text{ atau } 1^\circ = \frac{\neq}{180} \text{ rad} \text{ atau } 1 \text{ rad} = 57,3^\circ$$

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.



Definisi 8.3

1. $\frac{1}{4}$ putaran = $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ = 90 \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{1}{2} \pi \text{ rad}.$
2. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow 120^\circ = 120 \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}.$
3. $\frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ = 180 \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \pi \text{ rad}.$
4. $\frac{2}{3}$ putaran = $\frac{2}{3} \times 360^\circ = 240^\circ \Leftrightarrow 240^\circ = 240 \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{4}{3} \pi \text{ rad}.$
5. $\frac{3}{4}$ putaran = $\frac{3}{4} \times 360^\circ = 270^\circ \Leftrightarrow 270^\circ = 270 \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{3}{2} \pi \text{ rad}.$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengkonversikan ukuran sudut yang lain. Pahami contoh berikut ini.



Contoh 8.1

Perhatikan jenis ukuran sudut berikut ini.

1. $\frac{1}{5} \pi \text{ rad} = \dots \text{ putaran} = \dots^\circ$
2. $\frac{1}{6}$ putaran = $\dots \text{ rad} = \dots^\circ$
3. $135^\circ = \dots \text{ rad} = \dots \text{ putaran}$
4. Sudut yang dibentuk jarum jam, saat pukul 11.55, sama dengan berapa radian?
5. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, berapa besar putaran dalam derajat per detik? Berapa putaran dalam radian per detik?

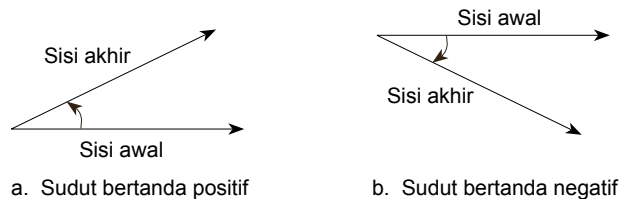
Penyelesaian

1. 1 putaran = $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$. Jadi, $\frac{1}{2}$ putaran = $\pi \text{ rad}$. Oleh karena itu, $\frac{1}{5} \pi \text{ rad} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{10}$ putaran = $\frac{1}{10} \times 360^\circ = 36^\circ$.
2. Karena 1 putaran = $2\pi \text{ rad}$, $\frac{1}{6}$ putaran = $\frac{1}{6} \times (2\pi \text{ rad}) = \frac{1}{3} \pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \pi \times \frac{180^\circ}{\neq} = 60^\circ$.

3. $135^\circ = 135^\circ \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{3}{4} \pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \text{ putaran} = \frac{3}{8} \text{ putaran}.$
4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.55 adalah 30° , $30^\circ = 30^\circ \times \frac{\neq}{180} \text{ rad} = \frac{1}{6} \pi \text{ rad}.$
5. Jika setiap menit, alat tersebut melakukan rotasi sebanyak 60 putaran, artinya dalam 1 detik. Pemancar berputar sebanyak 1 putaran. Karena 1 putaran penuh = 360° , jadi pemancar tersebut berputar sebesar $360^\circ/\text{detik}$. Selanjutnya, $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, artinya pemancar tersebut berputar sebesar $2\pi \text{ rad}/\text{detik}$.

360° pertama sekali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia.
Hitungan satu tahun pada kalender Babilonia, yaitu sebanyak 365 hari.

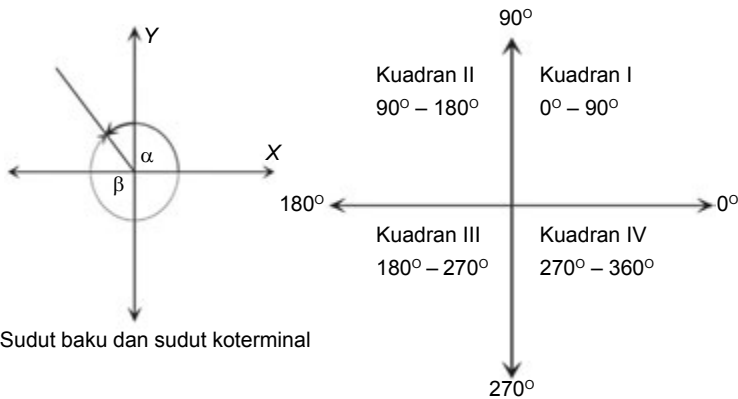
Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda “*positif*” jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda “*negatif*” jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



Gambar 8.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0° , 90° , 180° , 270° dan 360° .

Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α , maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



a. Sudut baku dan sudut koterminal

b. Besar sudut pada setiap kuadran

Gambar 8.4 Sudut secara geometri dan pembatas kuadran



Definisi 8.4

Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut ditempatkan pada posisi standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk memantapkan pemahaman akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

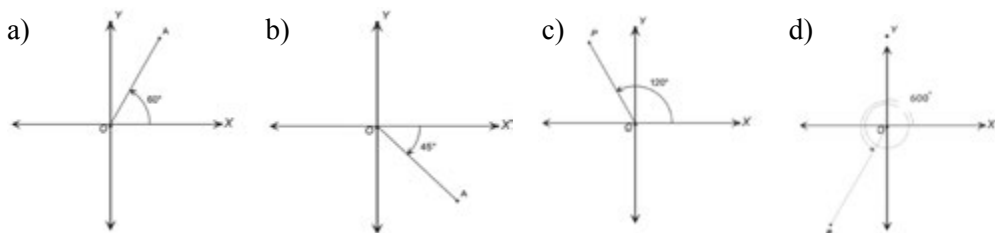


Contoh 8.2

Gambarkanlah sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

- a) 60° b) -45° c) 120° d) 600°

Penyelesaian



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran I.

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran IV.

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OP terletak di kuadran II.

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OR terletak di kuadran III.

Gambar 8.5 Sudut pada setiap kuadran



Uji Kompetensi 8.1

- Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
 - $\frac{1}{6}$ putaran
 - $\frac{2}{5}$ putaran
 - $\frac{3}{10}$ putaran
- Besar sudut dalam satuan derajat berikut ini, tentukan posisi setiap sudut tersebut.
 - 90°
 - 135°
 - 225°
 - 300°
 - -270°
 - 1200°Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas, dalam satuan radian.
- Misalkan, sudut θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut, dan tentukanlah posisinya.
 - 3θ
 - 2β
 - $\theta + \beta$
 - $2\beta - \theta$
- Tentukanlah sudut komplemen dan suplemen setiap sudut di bawah ini.
 - 15°
 - 105°
 - 68°
 - 96°
- Jika kita perhatikan jam, berapa kali kah dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini.
 - 90°
 - 180°
 - 30°
 - 120°
- Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat.
 - $\frac{\pi}{12}$
 - $\frac{5\pi}{7}$
 - $\frac{3\pi}{5}$
 - $\frac{7\pi}{8}$
 - $\frac{7\pi}{16}$
 - $\frac{8\pi}{15}$
- Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk radian.
 - 45°
 - 36°
 - 87.4°
 - $0,54^\circ$



Projek

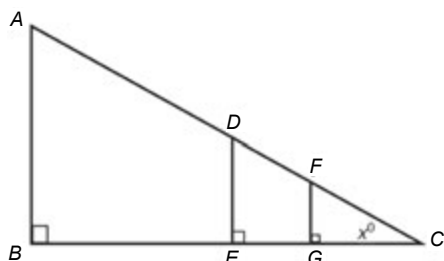
Himpun berbagai informasi penerapan sudut pada bidang fisika dan masalah nyata. Coba rancang pemecahan masalah terkait informasi yang kamu peroleh. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

2. Konsep Dasar Sudut

Coba kita pahami deskripsi berikut.

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda ditanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 6,4 m dan 32 m. Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika anda sebagai Dani, dapatkan anda mengukur bayangan anda sendiri?*

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.



Gambar 8.6 Model tiang bendera dan orang

Dimana:

AB = tinggi tiang bendera (8 m)

BC = panjang bayangan tiang (32 m)

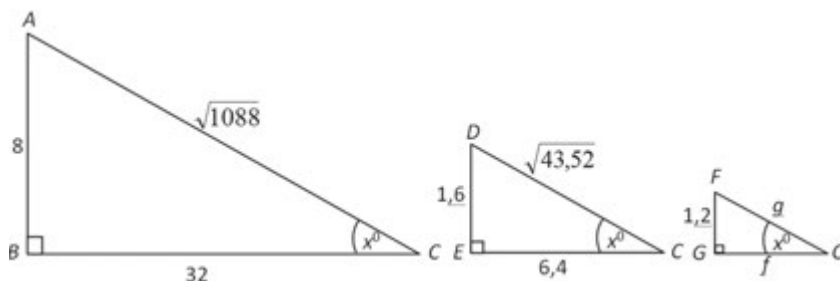
DE = tinggi pak Yahya (1,6 m)

EC = panjang bayangan pak Yahya (6,4 m)

FG = tinggi Dani (1,2 m)

GC = panjang bayangan Dani

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga buah segitiga, yaitu $\triangle ABC$, $\triangle DEC$, dan $\triangle FGC$ sebagai berikut.



Gambar 8.7 Kesebangunan

Karena $\triangle ABC$, $\triangle DEC$, dan $\triangle FGC$ adalah sebangun maka berlaku

$$\frac{FG}{DE} = \frac{GC}{EC} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{f}{6,4}. \text{ Diperoleh } f = 4,8$$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh nilai dari $FC = g = \sqrt{24,48}$. Berdasarkan $\triangle ABC$, $\triangle DEC$, dan $\triangle FGC$ diperoleh perbandingan sebagai berikut.

$$a. \frac{FG}{FC} = \frac{DE}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1,2}{\sqrt{24,48}} = \frac{1,6}{\sqrt{43,52}} = \frac{8}{\sqrt{1088}} = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,24$$

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C , ditulis $\sin x^\circ = 0,24$

$$b. \frac{GC}{FC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{4,8}{\sqrt{24,48}} = \frac{6,4}{\sqrt{43,52}} = \frac{32}{\sqrt{1088}} = \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,97$$

Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C , ditulis $\cos x^\circ = 0,97$

$$c. \frac{FG}{GC} = \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1,2}{4,8} = \frac{1,6}{6,4} = \frac{8}{32} = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0,25$$

Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C , ditulis $\tan x^\circ = 0,25$

Dari ketiga segitiga tersebut, terdapat perbandingan yang sama. Perhatikan perbandingan berikut.



Masalah-8.1

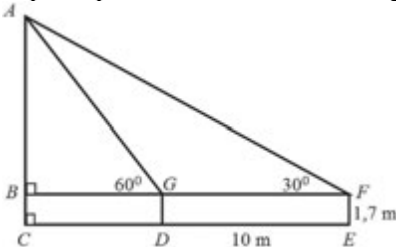


Gambar 8.8 Tiang Bendera

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60° dan guru kedua 30° maka dapatkah anda menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh titik, maka dapat diperoleh Gambar 8.9 sebagai berikut.



Gambar 8.9 Model masalah tiang bendera

Dimana:

AC = tinggi tiang bendera

DG = tinggi guru pertama

EF = tinggi guru kedua

DE = jarak kedua guru

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas maka kita memiliki perbandingan, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \frac{AB}{BG} && \Leftrightarrow BG = \frac{AB}{\tan 60^\circ} \\ \tan 30^\circ &= \frac{AB}{BF} = \frac{AB}{10 + BG} && \Leftrightarrow AB = (10 + BG) \times \tan 30^\circ \\ &&& \Leftrightarrow AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60^\circ}\right) \times \tan 30^\circ \\ &&& \Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = (10 \times \tan 60^\circ + AB) \times \tan 30^\circ \\ &&& \text{(kedua ruas kali } \tan 50^\circ) \\ &&& \Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ + AB \times \tan 30^\circ \\ &&& \Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ - AB \times \tan 30^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ \\ &&& \Leftrightarrow AB \times (\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ \\ &&& \Leftrightarrow AB = \frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}\end{aligned}$$

Jadi, tinggi tiang bendera adalah:

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} + 1,7 \text{ m.}$$



Gambar 8.10 Rumah Adat Suku Dayak

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya.

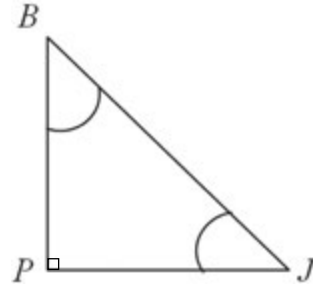
Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

3. Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku. Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk segitiga siku-siku, misalnya, meletakkan posisi sapu. Perhatikan Gambar 8.11 berikut.



Gambar 8.11 Posisi Sapu di dinding



Gambar 8.12 Segitiga PBJ

Dari Gambar 8.11, dapat dicermati bahwa dinding dengan lantai saling tegak lurus membentuk sudut siku-siku dan sapu membentuk sisi miring. Ilustrasinya disajikan pada Gambar 8.12. Dari Gambar 8.12, dapat disebut sisi-sisi segitiga siku-siku berturut-turut, yaitu PB , PJ , dan JB , dan ketiga sudutnya, berturut-turut yaitu, J , B , dan P adalah sudut siku-siku.

Sudut yang menjadi perhatian adalah sudut lancip pada segitiga siku-siku tersebut, yaitu $\angle J$ dan $\angle B$. Adapun hubungan perbandingan antara sudut lancip dan sisi-sisi segitiga siku-siku BPJ di atas.



Definisi 8.5

1. *sinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring, ditulis $\sin J = \frac{PB}{BJ}$.
2. *cosinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring $\cos J$, ditulis $\cos J = \frac{PJ}{BJ}$.
3. *tangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, tangen J , ditulis $\tan J = \frac{PB}{PJ}$.
4. *cosecan suatu sudut* didefinisikan sebagai panjang sisi miring dengan sisi di depan sudut, cosecan J , ditulis $\operatorname{cosec} J = \frac{BJ}{PB}$, atau $\operatorname{cosec} J = \frac{1}{\sin J}$.
5. *secan suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring dengan sisi di samping sudut, secan J , ditulis $\operatorname{sec} J = \frac{BJ}{PJ}$, atau $\operatorname{sec} J = \frac{1}{\cos J}$.

6. *cotangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, *cotangen J* , ditulis $\cotan J = \frac{PJ}{PB}$ atau $\cotan \frac{1}{\tan J}$.

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, konsep matematika lain yang perlu diingat kembali adalah teorema Pythagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. *Nah*, karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip J , silahkan rumuskan ke enam jenis perbandingan sudut untuk sudut B . Untuk lebih paham dengan konsep di atas, mari kita pelajari contoh-contoh berikut ini.



Contoh 8.3

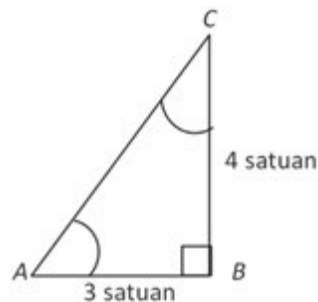
Diberikan segitiga siku-siku ABC , siku-siku di $\angle ABC$. Jika Panjang sisi $AB = 3$ satuan, $BC = 4$ satuan. Tentukanlah $\sin A$, $\cos C$, dan $\tan A$.

Penyelesaian

Untuk segitiga di samping, dengan Teorema Pythagoras diperoleh panjang sisi $AC = 5$ satuan. Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 8.5.

Bagian 1, 2, dan 3, maka berlaku:

- $\sin A = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{4}{5}$
- $\cos A = \frac{\text{Panjang sisi di samping sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{3}{5}$
- $\tan A = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi di samping sudut } A} = \frac{4}{3}$



Gambar 8.13 Segitiga siku-siku

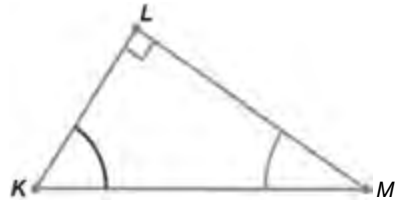
Perlu diketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu dihadapan sudut siku-siku.

Contoh 8.4

Perhatikan segitiga siku-siku di samping ini.

Diketahui $\tan M = \frac{8}{15}$,

tentukanlah $\sin M$ dan $\cos M$!



Gambar 8.14 Segitiga siku-siku KLM

Penyelesaian

Untuk menjawab contoh ini, kita mulai dari $\tan M = \frac{8}{15}$. Artinya, menurut Definisi 8.6, bahwa

$$\tan M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi di samping sudut } M} = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{15}$$

Jadi, panjang sisi $KL = 8$, dan $LM = 15$.

dengan Teorema Pythagoras, diperoleh $KM = 17$,

untuk menentukan nilai $\sin M$ dan $\cos M$, menurut Definisi 8.5 diperoleh:

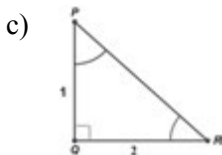
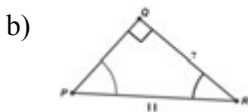
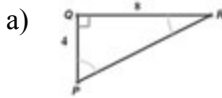
- $\sin M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{KL}{KM} = \frac{8}{17}$ dan
- $\cos M = \frac{\text{Panjang sisi di samping sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{LM}{KM} = \frac{15}{17}$.

Dari kedua contoh di atas, dapat dipelajari berbagai kombinasi persoalan mengenai nilai perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.



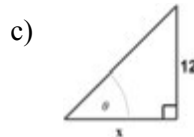
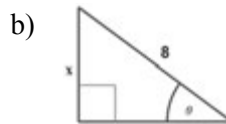
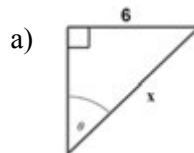
Uji Kompetensi 8.2

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakanlah jawaban Anda dalam bentuk paling sederhana.

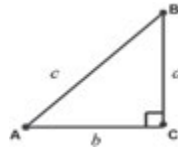


2. Diketahui suatu segitiga siku-siku, dengan nilai sinus salah satu sudut lancipnya adalah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tentukanlah nilai cosinus, tangen sudut tersebut.
3. Pada sebuah segitiga KLM , dengan siku-siku di L , berlaku $\sin M = \frac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukanlah panjang sisi segitiga yang lain.
4. Luas segitiga siku-siku RST , dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2 . Tentukanlah nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T .
5. Di bawah ini diberikan tiga segitiga siku-siku, diketahui $\sin \theta = \frac{2}{5}$.

Tentukanlah nilai x .



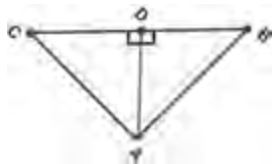
6. Pada segitiga XYZ dengan siku-siku di Y , $\cos Z = \frac{20}{24}$, tentukan nilai $\tan X$ dan $\tan Z$.
7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.



Tunjukkan bahwa:

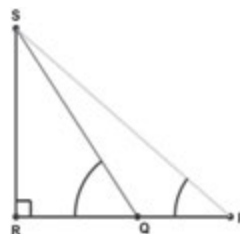
- a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- b) $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$
- c) $\operatorname{cosec}^2 A - \cotan^2 A = 1$
8. Dalam segitiga siku-siku ABC , diketahui panjang $BC = a$ dan $\angle ABC = \theta$.

Tentukanlah panjang garis tinggi AD .



9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukanlah nilai $\sin x$ dan $\cos x$!

10. Diketahui segitiga PRS , seperti gambar di samping, siku-siku di R . Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ dan $\angle RPS = \gamma$. Tentukanlah panjang sisi RS !



Projek

Rancanglah masalah nyata minimal tiga buah terkait penerapan perbandingan nilai sisi segitiga dan terkait trigonometri di bidang teknik bangunan dan bidang matematika. Selesaikanlah masalah tersebut dan buat laporannya serta sajikan di depan kelas.

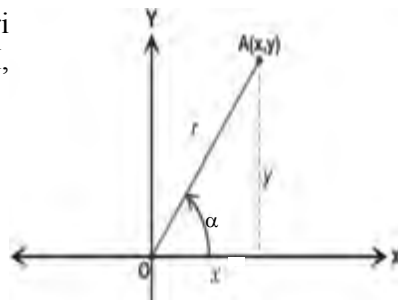
4. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

Awal subbab ini, akan dikaji nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan kita pelajari pada setiap kuadran dalam koordinat Kartesius. Mari kita pahami melalui pembahasan berikut ini.

Misalkan titik $A(x, y)$, panjang $OA = r$ dan sudut $AOX = \alpha$.

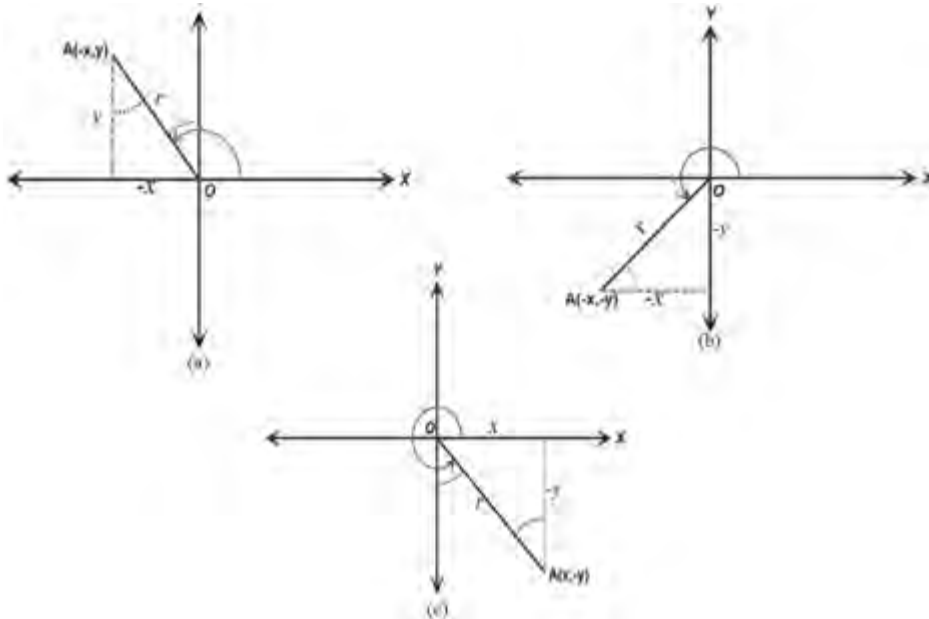
Mari kita perhatikan gambar di samping, dari segitiga siku-siku yang terdapat di kuadran I, berlaku :

- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.
- $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.



Gambar 8.15 Segitiga siku-siku AOX yang berada di kuadran I

Dengan mempertimbangkan semua kombinasi koordinat titik pada koordinat Kartesius, kita dapat telusuri perbedaan nilai tanda untuk ketiga perbandingan trigonometri yang utama.



Gambar 8.16 Kombinasi sudut pada koordinat Cartesius

Garis putus-putus pada gambar menyatakan proyeksi setiap sumbu, misalnya pada Gambar 8.16(a), garis putus-putus adalah proyeksi sumbu Y di kuadran II. Sedangkan garis putus-putus melengkung menyatakan besar sudut yang besarnya sama, misalnya, pada Gambar 8.16 (b), garis putus-putus melengkung menyatakan dua sudut yang besarnya sama.

Contoh 8.5

Misalkan diketahui titik-titik berikut ini:

1. $A (-12, 5)$ dan $\angle XOA = \alpha$.
2. $B (15, -8)$ dan $\angle XOB = \theta$.

Tentukanlah nilai $\sin \alpha$ dan $\tan \alpha$, serta $\cos \theta$ dan $\tan \theta$!

Penyelesaian

1. Dengan memperhatikan koordinat titik $A (-12, 5)$, sangat jelas bahwa titik tersebut terletak di kuadran kedua, karena $x = -12$, dan $y = 5$. Secara geometris, disajikan pada gambar berikut ini.

Karena $x = -12$, dan $y = 5$, dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh sisi miring, $r = 13$. Oleh karena itu, diperoleh :

$$\bullet \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

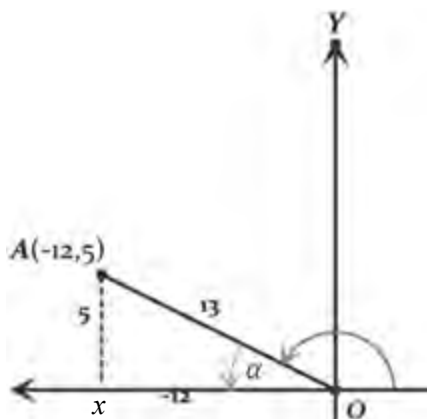
$$\bullet \tan \alpha = -\frac{5}{12}$$

2. Titik $B(15, -8)$, berada di kuadran IV, karena $x = 15$, dan $y = -8$.

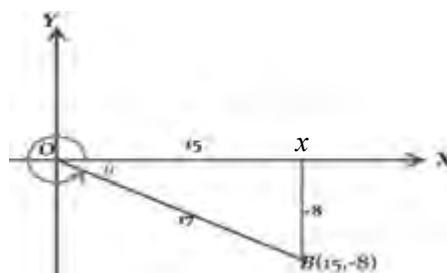
Untuk $x = 15$, $y = -8$, dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh sisi miring, $r = 17$. Oleh karena itu, berlaku:

$$\bullet \cos \theta = \frac{15}{17}$$

$$\bullet \tan \theta = -\frac{8}{17}$$



Gambar 8.17 Titik $A(-12, 5)$ pada kuadran II



Gambar 8.18 Titik $B(15, -8)$ pada kuadran IV

Dari contoh di atas, dapat dipahami, ternyata nilai sudut perbandingan trigonometri, dapat bernilai positif juga negatif, tergantung pada letak koordinat titik yang diberikan. Selanjutnya, kebalikan dari kondisi pada contoh 5, dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.

Contoh 8.6

Jika diketahui:

- $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, θ berada di kuadran II, tentukan nilai cosec θ dan cotan θ .
- $\tan \beta = -\frac{6}{12}$, β berada di kuadran IV, tentukan nilai sin β dan cos β .

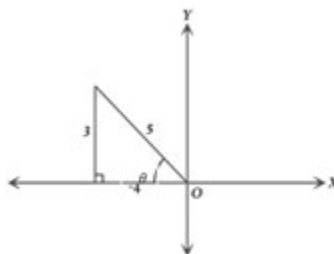
Penyelesaian

1. Sudut θ yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri.

Dalam koordinat Cartesius, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, digambarkan sebagai berikut:

Dari gambar di samping, mudah kita pahami bahwa:

- $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$
- $\operatorname{cotan} \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$

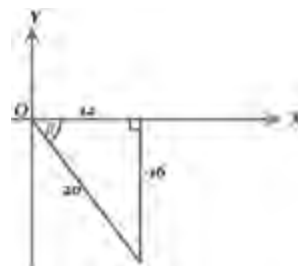


Gambar 8.19 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

2. Dengan pemahaman yang sama, dapat kita gambarkan $\tan \beta = -\frac{16}{12}$, dengan β di kuadran IV sebagai berikut:

Dengan atribut segitiga siku-siku yang sudah lengkap, seperti pada gambar di samping, dengan mudah kita menentukan:

- $\sin \beta = -\frac{16}{20}$, dan
- $\cos \beta = \frac{12}{20}$.



Gambar 8.20 $\tan \beta = -\frac{16}{12}$

Tentunya, dengan pengetahuan dari Gambar 8.20 dan pengalaman pembahasan Contoh 8.5 dan 8.6 di atas, dapat kita merumuskan nilai perbandingan trigonometri di setiap kuadran, yaitu:

Di Kuadran I : $x > 0, y > 0$

- $\sin \alpha = \frac{(+y)}{(+r)} = +\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(+x)}{(+r)} = +\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(+y)}{(+x)} = +\frac{y}{x}$

Di Kuadran II : $x < 0, y > 0$

- $\sin \alpha = \frac{(+y)}{(+r)} = +\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-x)}{(+r)} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(+y)}{(-x)} = -\frac{y}{x}$

Di Kuadran III : $x < 0, y < 0$

- $\sin \alpha = \frac{(-)y}{(+)r} = -\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$

Di Kuadran IV : $x > 0, y < 0$

- $\sin \alpha = \frac{(-)y}{(+r)} = -\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-)x}{(+r)} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$

Gambar 8. 21 Nilai tanda perbandingan trigonometri untuk setiap kuadran

Dalam kajian trigonometri ada istilah sudut istimewa, yang artinya sudut-sudut yang nilai perbandingan trigonometri dapat ditentukan secara eksak. Misalnya, 30° , 45° , 60° , dan 90° merupakan sudut istimewa di kuadran I. Selanjutnya (120° , 135° , 150° , 180°), (210° , 225° , 240° , 270°), dan (300° , 315° , 330° , 360°) berturut-turut adalah sudut-sudut istimewa di kuadran ke-II, ke-III, dan ke-IV. Pada beberapa referensi yang lain, sudut-sudut istimewa tersebut dinyatakan dalam satuan radian.

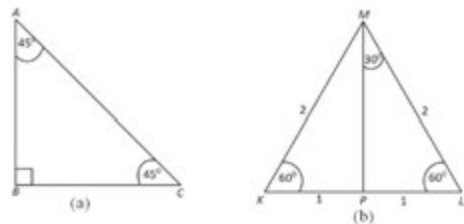
Pembahasan selanjutnya, yaitu, bagaimana nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut istimewa. Pertama sekali, kita akan kaji nilai-nilai perbandingan tersebut di kuadran I.

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30° , 45° dan 60°

Mari perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa. Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku yang mengandung sudut $30^\circ, 45^\circ$, dan 60° . Perhatikan gambar berikut.

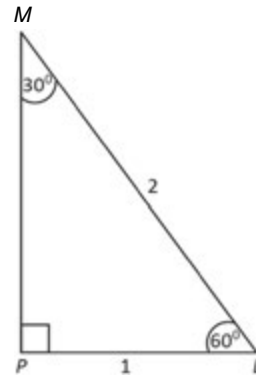
Dari Gambar 8.22 (b), misalkan panjang sisi jika kita menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut 30° dan 60° . Mari perhatikan segitiga MPL di bawah ini. Dengan teorema pythagoras, diperoleh panjang $MP = \sqrt{3}$. Oleh karena itu berlaku:

- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
- $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



Gambar 8.22 Segitiga siku-siku yang memuat sudut $30^\circ, 45^\circ$, dan 60°

- $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



Gambar 8.23 Segitiga siku-siku *MPL*

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut 45° , silahkan diskusikan dan kaji bersama teman-temanmu melalui gambar segitiga *ABC* pada Gambar 8.22(a). Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada saat 0° dan 90° , mari kita cermati gambar berikut ini.

Secara umum, dapat ditentukan nilai semua sudut istimewa, yaitu dengan cara menentukan setiap koordinat titik pada lingkaran dengan jari-jari 1.

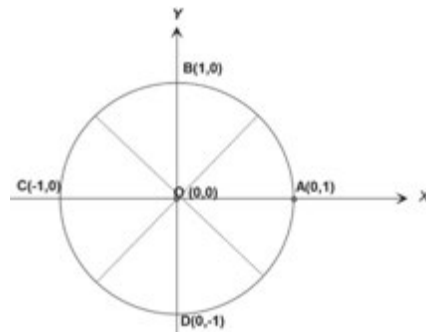
Misalnya untuk titik *A* (0,1),

- $\sin 0^\circ = 0$
- $\cos 0^\circ = 1$
- $\tan 0^\circ = 0$

dan untuk menentukan nilai perbandingan sudut pada saat sudut 90° , digunakan titik *B*(1,0).

- $\sin 90^\circ = 1$
- $\cos 90^\circ = 0$
- $\tan 90^\circ$ tak terdefinisi

Selengkapnya, nilai setiap perbandingan trigonometri pada setiap sudut istimewa $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan 90° , di sajikan di Tabel 8.1 berikut.



Gambar 8.24 Perbandingan Trigonometri

Tabel 8.1 Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuadran Pertama

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

Sekarang, dengan menggunakan Gambar 8.21, dan Tabel 8.1, silahkan kamu diskusikan dengan temanmu untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran I, II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memastikan hasil kerjamu, secara lengkap di bawah ini disajikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut-sudut istimewa.

Tabel 8.2 Tabel lengkap Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I, II, III, dan IV

Sudut	Sin	Cos	Tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tak terdefinisi
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Sudut	Sin	Cos	Tan
180°	0	-1	0
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	-1	0	tak terdefinisi
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	0	1	0



Masalah-8.2

Seorang anak ingin menentukan besar sudut dari sebuah perbandingan trigonometri. Diberikan kepadanya perbandingan sebagai berikut.

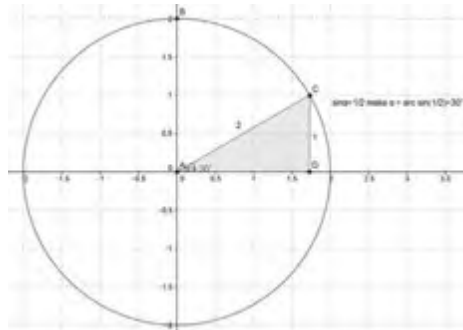
$\sin \alpha = \frac{1}{2}$, tugasnya adalah menentukan nilai α (besar sudut)!

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian I:

Langkah-langkah yang dilakukannya adalah

1. Menggambar sebuah segitiga siku-siku dan menerapkan sifat perbandingan sinus. Adapun cara yang dilakukannya adalah menggambar sisi di hadapan sudut dengan panjang 1 satuan dan menggambar sisi miring sebuah segitiga dengan panjang 2.



2. Selanjutnya dia mengukur besar sudut dari segitiga siku-siku yang sudah terbentuk dengan menggunakan busur derajat.
3. Berdasarkan pengukuran yang dilakukan ternyata diperoleh besarnya sudut α adalah 30° .

Penyelesaian II:

1. Alternatif penyelesaian yang lain yaitu dengan menggunakan kalkulator. Dengan fasilitas yang dimiliki kalkulator dapat diperoleh invers nilai sin, yaitu

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ.$$
2. Invers dari $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ selanjutnya dituliskan dengan $\arcsin \frac{1}{2}$.

Penyelesaian III:

1. Alternatif yang mungkin dilakukan adalah dengan melihat tabel. Untuk kasus nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa pada kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV dapat menggunakan Tabel 8.2.

Latihan 8.1

1. Tentukan nilai β jika $\cos \beta = \frac{1}{2}$!
2. Tentukan nilai θ jika $\tan \theta = 0$!

Penulisan ini juga berlaku untuk perbandingan trigonometri lainnya. Misalnya invers dari $\cos x = y$ maka inversnya adalah $x = \arcsin y$; invers dari $\tan x = y$ maka inversnya adalah $x = \arctan y$.

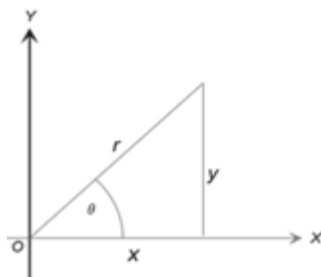
Latihan 8.2

Jika $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan x tumpul berapakah nilai dari $\cos x$?

Contoh 8.7

Perhatikan Gambar 8.25!
Tunjukkan bahwa

- ⊙ $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- ⊙ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- ⊙ $\tan^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$



Gambar 8.25 Segitiga siku-siku

Penyelesaian

Dari Gambar 8.25 berlaku:

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}.$$

Nilai perbandingan $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

sedangkan $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

sehingga berlaku bahwa:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} = \tan \theta \Leftrightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

Perlu kita kenalkan, bahwa $(\sin \theta)(\sin \theta) = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$; ($\sin^2 \theta$ dibaca sinus kuadrat teta). Tetapi perlu diingat bahwa, $\sin^2 \theta \neq \sin \theta^2$.

Tentunya, jika $\sin \theta = \frac{y}{r}$ maka $\sin^2 \theta = (\sin \theta) \cdot (\sin \theta) = \left(\frac{y}{r}\right) \cdot \left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{r^2}$.

Sama halnya untuk memahami $\cos^2 \theta = \frac{x^2}{r^2}$, dan $\tan^2 \theta = \frac{y^2}{x^2}$.

Jumlah dari sinus kuadrat teta dengan cosinus kuadrat teta dinyatakan sebagai berikut:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Jadi ditemukan:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \dots\dots\dots (1)$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan identitas trigonometri.

Dari persamaan ini kita dapat menemukan turunan rumusan dalam trigonometri. Misalnya, jika kedua ruas persamaan tersebut dibagi $\cos^2 \theta$, (dengan syarat $\cos^2 \theta \neq 0$), maka persamaan (1) berubah menjadi:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \dots\dots\dots (2)$$

Jika kita lanjutkan membagi kedua ruas persamaan (1) dengan $\sin^2 \theta$, maka berlaku:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \cotan^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \dots\dots\dots (3)$$

Formula di atas berlaku, untuk semua satuan sudut yang sama. Misalnya, $\alpha = 15^\circ$, maka $2\alpha = 30^\circ$.

Oleh karena itu berlaku:

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Tolong ingat kembali bahwa, $\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$, tetapi $\sin (30^\circ)^2 = \sin 900^\circ = 0$, (sudahkah kamu tahu alasannya?).

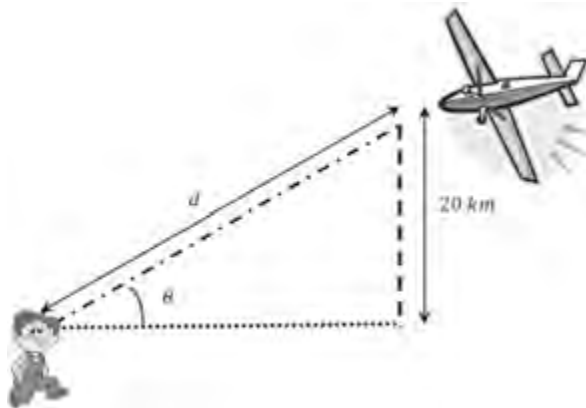


Masalah-8.3

Di daerah pedesaan yang jauh dari Bandar udara, kebiasaan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka. Bolang, mengamati sebuah pesawat udara, yang terbang dengan ketinggian 20 km. Dengan sudut elevasi pengamat (Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ , tentukanlah jarak pengamat ke pesawat jika : $\theta = 30^\circ$, $\theta = 90^\circ$, dan $\theta = 120^\circ$.

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 8.26.



Gambar 8.26 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi θ .

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan $\sin \theta$, (kenapa?).

◦ Untuk $\theta = 30^\circ$, maka $\sin 30^\circ = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$ km.

◦ Untuk $\theta = 90^\circ$, maka $\sin 90^\circ = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{1} = 20$ km.

Artinya, dengan sudut elevasi 90° , maka pesawat tepat berada di atas si Bolang, sehingga sama dengan tinggi terbangnya pesawat.

◦ Untuk $\theta = 120^\circ$, maka $\sin 120^\circ = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 120^\circ} = \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40}{3}\sqrt{3}$ km.

Dapatkan kamu ilustrasikan bagaimana posisi pengamatan si Bolang dengan besar sudut elevasi, $\theta = 120^\circ$.



Masalah-8.4

Sebuah perusahaan memproduksi mainan. Produksi hasil penjualan bulanan (dalam satuan ribuan unit) selama 2 tahun diprediksi, sebagai berikut

$$S = 23,1 + 0,442t + 4,3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

dengan $t =$ waktu (bulan)

$t = 1$ merepresentasikan hasil penjualan bulan Januari tahun 2010.

Tentukanlah prediksi penjualan pada bulan Pebruari 2010 dan bulan April 2011.

Alternatif Penyelesaian

Jika bulan Januari tahun 2010 menyatakan waktu $t = 1$, maka bulan Pebruari 2010 menyatakan waktu $t = 2$, dan bulan April 2011 menyatakan $t = 16$.

1. Prediksi penjualan mainan pada bulan Pebruari 2010, waktu $t = 2$ adalah:

$$S = 23,1 + 0,442 \cdot (2) + 4,3 \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$S = 23,1 + 0,884 + 4,3 \cos(60^\circ)$$

$$S = 23,984 + 4,3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 26,134$$

Jadi banyaknya mainan yang terjual pada bulan Pebruari 2010 adalah sebanyak 26.134 unit.

2. Prediksi penjualan mainan pada bulan April 2011, $t = 16$ adalah:

$$S = 23,1 + 0,442 \cdot (16) + 4,3 \cos\left(\frac{16\pi}{6}\right)$$

$$S = 23,1 + 0,442 \cdot (16) + 4,3 \cos(960^\circ)$$

$$S = 30,172 + 4,3 \cos(240^\circ) \quad (\text{kenapa } \cos(960^\circ) = \cos(240^\circ)?)$$

$$S = 30,172 + 4,3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28,022$$

Karena jumlah penjualan dalam ribuan unit, maka prediksi penjualan pada bulan April 2011 adalah 28.022 unit.

6. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Grafik Fungsi $y = \sin x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Dengan menggunakan nilai-nilai sudut yang telah diberikan di atas, mari kita selesaikan persamaan berikut ini.



Contoh 8.8

Tentukanlah nilai x yang memenuhi setiap persamaan di bawah ini:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

b) $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$

Penyelesaian

$x \in [0, 2\pi]$ merupakan domain untuk menyelesaikan persamaan pada bagian a).

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, hanya berlaku untuk $x = 30^\circ$ dan $x = 150^\circ$, karena perbandingan trigonometri hanya bernilai positif di kuadran I dan II. Sedangkan untuk $x = 210^\circ$ dan $x = 330^\circ$, nilai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pasangan nilai x dengan nilai perbandingan $\sin x$ merupakan suatu koordinat titik pada grafik fungsi sinus, yaitu koordinat:

$$\left(30^\circ, \frac{1}{2}\right), \left(150^\circ, \frac{1}{2}\right), \left(210^\circ, -\frac{1}{2}\right), \left(330^\circ, -\frac{1}{2}\right)$$

b) Persamaan $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x \Leftrightarrow 2 \sin x = -\sqrt{2}$ atau $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Jika kamu sudah menguasai Tabel 9.2, tentunya dengan mudah, kamu dapat menyebutkan bahwa nilai x yang memenuhi adalah $x = -225^\circ$ dan $x = -315^\circ$. Selain itu juga, kita harus menguasai bahwa nilai $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pada saat $x = 45^\circ$ dan $x = 135^\circ$.

Oleh karena itu, sekarang kita memiliki pasangan titik:

$$\left(45^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(135^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(225^\circ, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(315^\circ, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Selain pasangan titik besar sudut dan nilai perbandingan trigonometri di atas, tentunya, masih terdapat pasangan koordinat yang lain, yaitu:

- $\sin x = 0$, untuk $x = 180^\circ$ dan $x = 360^\circ$.
Akibatnya diperoleh: $(0^\circ, 0)$, $(180^\circ, 0)$, $(360^\circ, 0)$.

- $\sin x = 1$, untuk $x = 90^\circ$ $\sin x = -1$, untuk $x = 270^\circ$.

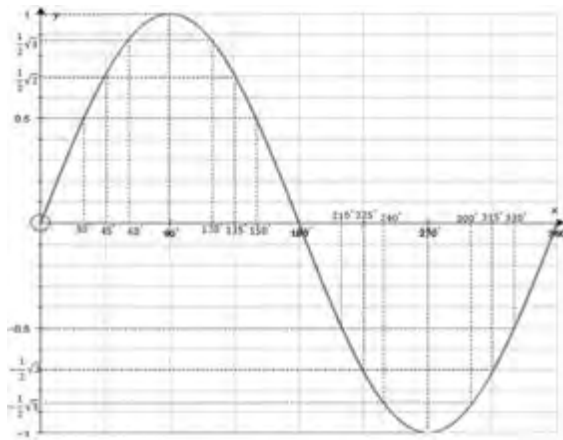
Akibatnya berlaku: $(90^\circ, 1)$, $(270^\circ, 1)$.

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $x = 60^\circ$, dan $x = 120^\circ$, serta $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada saat $x = 240^\circ$,

dan $x = 300^\circ$. Oleh karena itu berlaku:

$$\left(60^\circ, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(120^\circ, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(240^\circ, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(300^\circ, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Sebagai kumulatif hasil semua pasangan titik-titik di atas, kita sajikan pada Gambar 8.27.



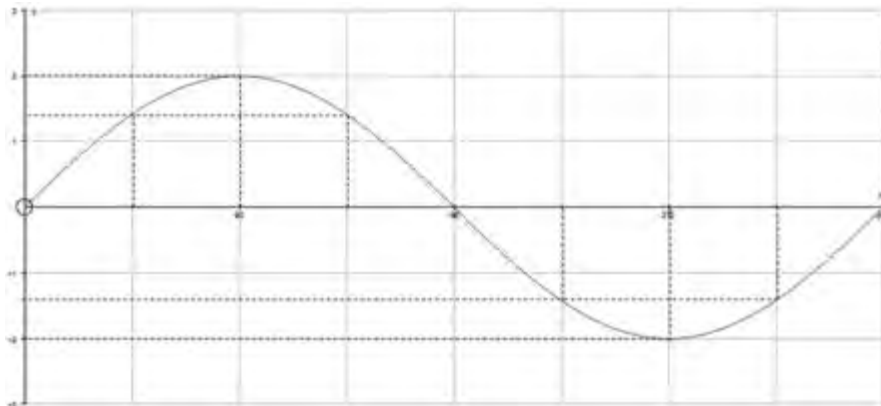
Gambar 8.27 Grafik fungsi $y = \sin x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$

Grafik $y = \sin x$ memiliki nilai $y_{\max} = 1$ dan $y_{\min} = -1$.

Secara manual, grafik di atas dapat kamu gambarkan pada kertas dengan spasi yang jelas.

- Jika fungsi $y = \sin x$, maka fungsi $y = \operatorname{cosec} x$, untuk domain $[0^\circ, 360^\circ]$. Silahkan temukan pasangan-pasangan titik untuk fungsi tersebut, kemudian sketsakan.

Berikut ini juga diberikan grafik fungsi sinus (Gambar 8.28), tetapi tentunya ada beberapa perbedaan yang anda harus cermati dan pahami. Nilai konstanta a yang memenuhi untuk fungsi di bawah ini adalah $a = 2$. Adanya konstanta, mengakibatkan perubahan pada nilai maksimum dan nilai minimum fungsi.



Gambar 8.28 Grafik fungsi $y = a \sin x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, $a \in \mathbb{R}$

Selanjutnya, akan kita bandingkan grafik fungsi di atas dengan grafik fungsi $y = \cos x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$.

b. Grafik Fungsi $y = \cos x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$



Contoh 8.9

Mari cermati beberapa persamaan di bawah ini.

- 1) $(\cos x)^2 - 2 \cdot \cos x = -1$.
- 2) $\sqrt{8} \cdot \cos x - 2 = 0$.

Penyelesaian

- 1) Persamaan $(\cos x)^2 - 2 \cdot \cos x = -1$ merupakan persamaan trigonomteri berbentuk persamaan kuadrat. Tentunya, untuk suatu persamaan kuadrat kita membutuhkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena itu dapat kita tulis:

$$(\cos x)^2 - 2 \cdot \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1) \cdot (\cos x - 1) = 0$$

atau $(\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$.

Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = 1$ adalah $x = 0^\circ$ dan $x = 360^\circ$ (kembali sesuaikan dengan Tabel 9.2).

Nilai $\cos x = -1$ berlaku untuk $x = 180^\circ$ dan $\cos x = 0$ untuk $x = 90^\circ$ dan $x = 270^\circ$.

Akibatnya, kita temukan pasangan titik:

$(0^\circ, 1)$, $(90^\circ, 0)$, $(180^\circ, -1)$, $(270^\circ, 0)$ dan $(360^\circ, 1)$

- 2) Persamaan $\sqrt{8} \cdot \cos x - 2 = 0$ dapat kita sederhanakan menjadi:

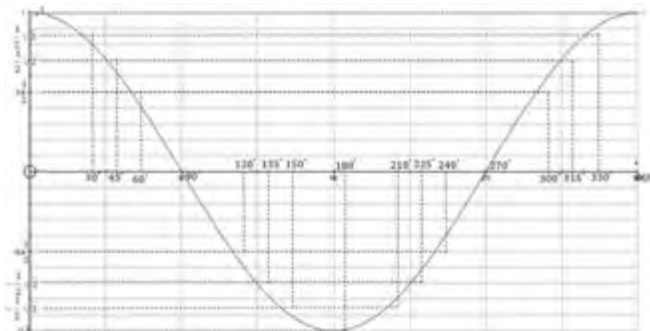
$$2\sqrt{2} \cdot \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah untuk $x = 45^\circ$ dan $x = 315^\circ$ (lihat Tabel 9.2). Sedangkan untuk $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ berlaku untuk $x = 135^\circ$ dan $x = 225^\circ$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan pasangan titik-titik berikut:

$$\left(45^\circ, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135^\circ, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225^\circ, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315^\circ, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

- Selanjutnya, silahkan bentuk pasangan-pasangan titik yang lain, dapat kita lihat dari Tabel 8.2.

Jadi, dengan menggunakan semua pasangan-pasangan titik di atas, berikut ini disajikan pada grafik berikut.

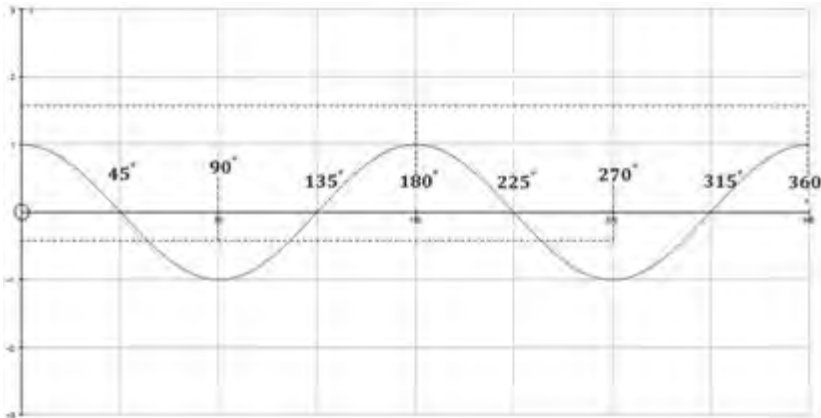


Gambar 8.29 Grafik fungsi $y = \cos x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$

Dari grafik di atas, dapat kita cermati bahwa seiring bertambahnya domain fungsi $y = \cos x$, kurva bergerak dari $y = 1$ hingga mencapai kembali $y = 1$. Nilai maksimum fungsi $y = \cos x$ memiliki nilai $y_{maks} = 1$ dan nilai $y_{min} = -1$.

- Tentukanlah pasangan titik-titik yang dilalui grafik fungsi $y = \sec x$, untuk $x [0, 360^\circ]$. Kemudian sajikan pasangan titik-titik tersebut dalam grafik fungsi trigonometri.

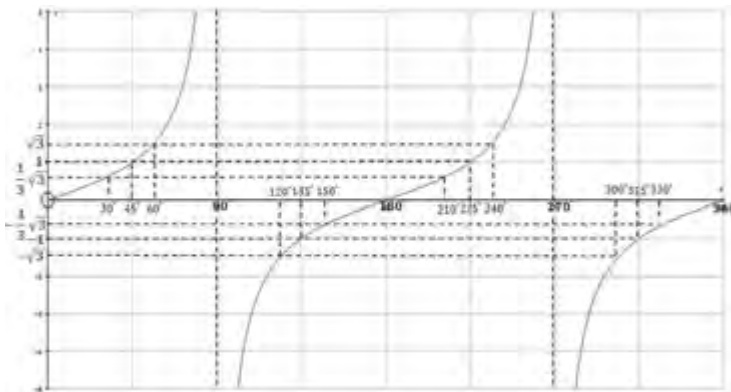
Gambar 8.30 di bawah ini adalah grafik $y = \cos bx$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, $b \in R$. Cermati dan tentukan perbedaan dengan grafik $y = \cos x$.



Gambar 8.30 Grafik fungsi $y = \cos bx$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, $b \in R$

c. **Grafik Fungsi $y = \tan x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$.**

Dengan cara yang sama, menggambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $x \in [0^\circ, 360^\circ]$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.

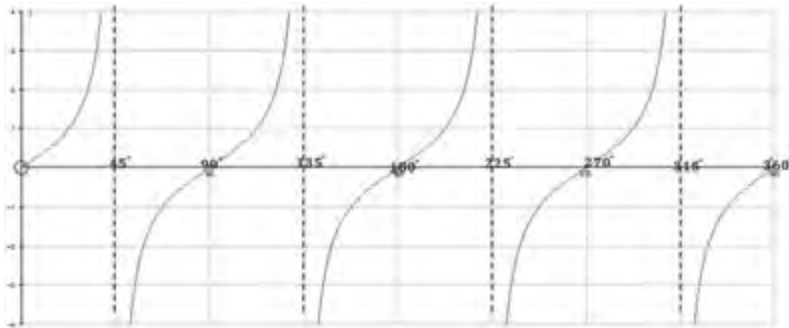


Gambar 8.31 Grafik fungsi $y = \tan x$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$

Grafik di atas, berbeda dengan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$. Khususnya, mengenai nilai maksimum dan nilai minimum fungsi. Perhatikan nilai fungsi disaat $x \rightarrow 90^\circ$ dan $x \rightarrow 270^\circ$ (dari kanan), nilai $y = \tan x$ menuju tak terhingga. Sebaliknya, untuk $x \rightarrow 90^\circ$ dan $x \rightarrow 270^\circ$ (dari kiri), nilai $y = \tan x$ menuju negatif tak terhingga.

- Dengan keadaan ini, apa yang dapat kalian simpulkan dari gambar di atas?

Selanjutnya, cermati grafik di bawah.

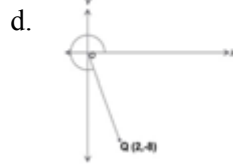
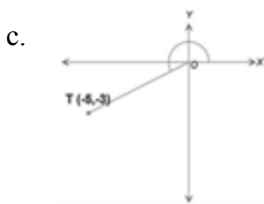
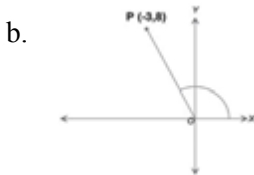
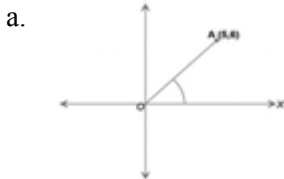


Gambar 8.32 Grafik fungsi $y = \tan ax$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, dan $a \in \mathbb{R}$



Uji Kompetensi 8.3

1. Perhatikan setiap gambar di bawah ini, tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen, secan, cosec, dan cotangen setiap sudut yang dinyatakan.



2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen untuk setiap titik yang disajikan berikut:
- $P(5,12)$
 - $Q(-5.2,7.2)$
 - $R(-5,-2)$
 - $T(3.5,-7.75)$
3. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut. Berikan alasanmu.
- $\sec x$ dan $\sin x$ selalu memiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.
 - Di kuadran I, nilai sinus selalu lebih besar daripada nilai cosinus.

c. Untuk $30^\circ < x < 90^\circ$, dan $120^\circ < y < 150^\circ$, maka nilai $2 \cdot \sin x < \cos 2y$

4. Di bawah ini disajikan tabel yang menjelaskan tanda nilai beberapa perbandingan trigonometri.

$\sin \alpha > 0$	$\cos \alpha > 0$
$\sin \alpha < 0$	$\cos \alpha < 0$
$\tan \alpha < 0$	$\sin \alpha > 0$

Tentukanlah letak sudut α untuk setiap kondisi tanda nilai perbandingan.

5. Diberikan $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$ dengan $\sin \alpha > 0$, tentukanlah:

- $\cos \alpha$
- $\sec \alpha$
- $(\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha)$
- $\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\cotan \alpha}$

6. Diketahui $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$, dan nilai $\cotan \beta = 3$ tidak terdefinisi.

Tentukanlah :

- $\sin \beta$
- $\cos \beta$
- $\frac{\sin \beta}{\tan \beta + 1}$

d. $\frac{2 \sec \beta}{\tan \beta - 1}$

7. Sederhanakanlah bentuk persamaan berikut ini.

- $\cos x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot \tan x$
- $\cos x \cdot \cotan x + \sin x$

8. Diketahui β berada di kuadran III, dan $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, tentukanlah:

- $\frac{\sec \beta - \tan^2 \beta}{\tan \beta} + \sec \beta$
- $\frac{\sec^2 \beta + \tan^2 \beta}{2 \sin^2 \beta + 2 \cos^2 \beta}$

9. Sederhanakanlah bentuk ekspresi berikut.

- $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{\sin A}{1 - \cos A}$
- $(\sin B + \cos B)^2 + (\sin B - \cos B)^2$
- $(\operatorname{cosec} A - \cotan A) \cdot (1 + \cos A)$

10. Jika diketahui $Y_1 = a \sin bx$, dan $Y_2 = a \cos bx$, $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, $a, b \in R$. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum kedua fungsi, dan gambarkanlah gambar kedua fungsi.

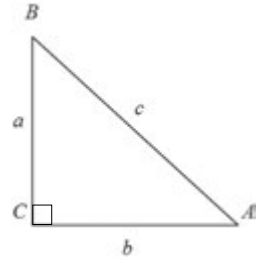


Projek

Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam permasalahan tersebut. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

1. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi hypotenusanya atau secara simbolik ditulis $a^2 + b^2 = c^2$ dengan c merupakan panjang sisi miring dan a serta b panjang sisi-sisi yang lain dari segitiga siku-siku tersebut.
2. Pada gambar segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-siku berada di C , maka berlaku perbandingan trigonometri berikut.



- a. $\sin A = \frac{a}{c}$
 - b. $\cos A = \frac{b}{c}$
 - c. $\tan A = \frac{a}{b}$
3. Nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran berlaku sebagai berikut.
 - a. Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
 - b. Pada kuadran II, hanya $\sin \alpha$ dan $\operatorname{cosec} \alpha$ yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
 - c. Pada kuadran III, hanya $\tan \alpha$ dan $\operatorname{cotan} \alpha$ yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
 - d. Pada kuadran IV, hanya $\cos \alpha$ dan $\sec \alpha$ yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
 4. Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah sebagai berikut.

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Bab 9

Geometri

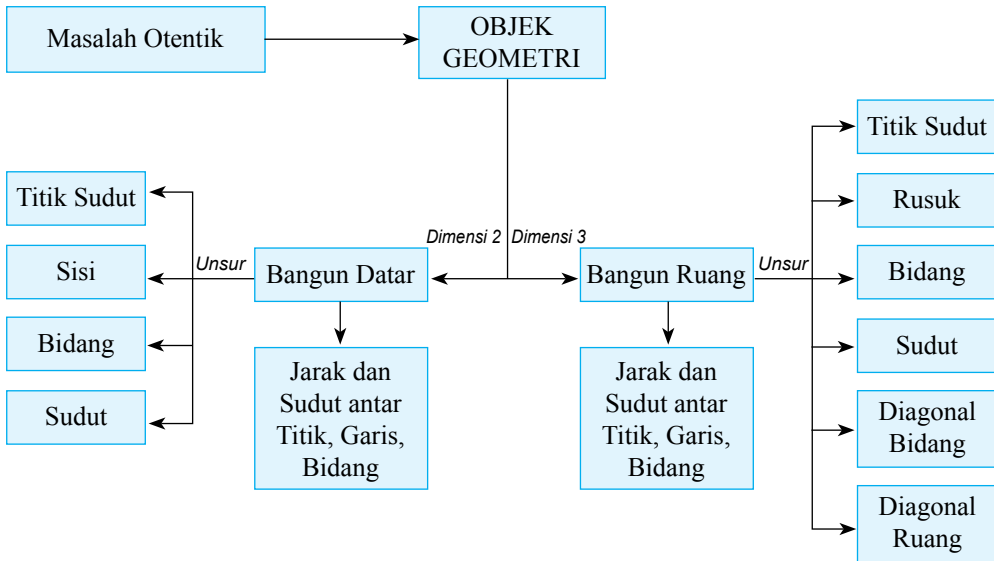
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. memiliki motivasi internal dan merasakan keindahan dan keteraturan matematika dalam perhitungan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat bangun datar dan ruang;2. memahami konsep jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang melalui demonstrasi menggunakan alat peraga atau media lainnya;3. menggunakan berbagai prinsip bangun datar dan ruang serta dalam menyelesaikan masalah nyata berkaitan dengan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang.	<p>Melalui pembelajaran materi geometri, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• menemukan konsep dan prinsip geometri melalui pemecahan masalah otentik;• berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur;• berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip bangun datar dan ruang dalam geometri untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Titik*
- *Garis*
- *Bidang*
- *Ruang*
- *Jarak*
- *Sudut*
- *Diagonal*

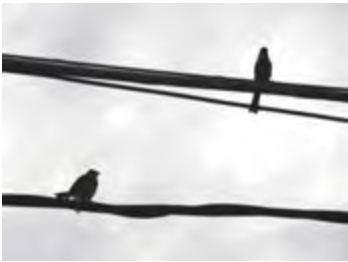
B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Kedudukan Titik



Gambar 9.1a Burung



Gambar 9.1b Titik pada garis

Perhatikan Gambar 9.1a dan Gambar 9.1b. Apa yang bisa kamu lihat? Misalkan kabel listrik adalah suatu garis dan burung adalah titik, maka dapat dikatakan bahwa tempat hinggap burung pada kabel listrik merupakan sebuah titik yang terletak pada suatu garis, yang dapat dilihat pada Gambar 9.1b.

Gambar berikut akan mencoba pemahaman kamu terhadap kedudukan titik dengan garis.



Gambar 9.2a Jembatan penyeberangan



Gambar 9.2a Garis dan titik

Jika dimisalkan jembatan penyeberangan merupakan suatu garis dan lokomotif kereta adalah suatu titik. Kita dapat melihat bahwa lokomotif tidak terletak atau melalui jembatan penyeberangan. Artinya jika dihubungkan dengan garis dan titik maka dapat disebut bahwa contoh di atas merupakan suatu titik yang tidak terletak pada garis.

Untuk lebih melengkapi pemahaman kedudukan titik terhadap garis, perhatikan pula Gambar 9.3a dan Gambar 9.3b.



Gambar 9.3a Bola di lapangan



Gambar 9.3b Dua titik A dan B

Gambar di atas merupakan contoh kedudukan titik terhadap bidang, dengan bola sebagai titik dan lapangan sebagai bidang. Sebuah titik dikatakan terletak pada sebuah bidang jika titik itu dapat dilalui bidang seperti terlihat pada titik A pada gambar dan sebuah titik dikatakan terletak di luar bidang jika titik itu tidak dapat dilalui bidang.

Perhatikan dua permasalahan di bawah ini!

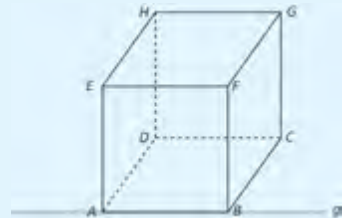


Masalah-9.1

Sebuah kardus berbentuk kubus $ABCD.EFGH$. Perhatikanlah kubus tersebut. Segmen atau ruas garis AB sebagai wakil garis g .

Pertanyaan:

- Tentukan titik sudut kubus yang terletak pada garis g !
- Tentukan titik sudut kubus yang berada di luar garis g !



Gambar 9.4 Kubus $ABCD.EFGH$ dan garis g

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus $ABCD.EFGH$ dan garis g dari gambar di atas, dapat diperoleh:

- titik sudut kubus yang terletak pada garis g adalah titik A dan B ,
- titik sudut kubus yang berada di luar garis g adalah titik $C, D, E, F, G,$ dan H .

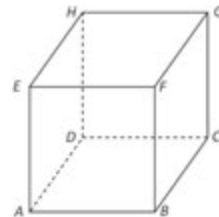


Contoh 9.1

Perhatikan kubus $ABCD.EFGH$ pada Gambar 9.5!

Terhadap bidang $DCGH$, tentukanlah:

- titik sudut kubus apa saja yang terletak pada bidang $DCGH$!
- titik sudut kubus apa saja yang berada di luar bidang $DCGH$!



Gambar 9.5 Kubus $ABCD.EFGH$

Penyelesaian

Pandang kubus $ABCD.EFGH$, pada bidang $CDGH$ dapat diperoleh:

- Titik sudut yang berada di bidang $CDGH$ adalah D , C , G , dan H .
- Titik sudut yang berada di luar bidang $CDGH$ adalah A , B , E , dan F .

Pertanyaan Kritis

Jika suatu titik dilalui oleh garis atau bidang, apakah titik memiliki jarak terhadap garis dan apakah titik memiliki jarak terhadap bidang?



Definisi 9.1

- 1) Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
- 2) Jika suatu titik tidak dilalui garis, maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
- 3) Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
- 4) Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

b. Jarak antara Titik dan Titik



Masalah-9.2



Gambar-9.6 Peta rumah

Rumah Andi, Bedu, dan Cintia berada dalam satu pedesaan. Rumah Andi dan Bedu dipisahkan oleh hutan sehingga harus menempuh mengelilingi hutan untuk sampai ke rumah mereka. Jarak antara rumah Bedu dan Andi adalah 4 km sedangkan jarak antara rumah Bedu dan Cintia 3 km. Dapatkah kamu menentukan jarak sesungguhnya antara rumah Andi dan Cintia?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan rumah Andi, Bedu, dan Cintia diwakili oleh tiga titik yakni A , B , dan C . Dengan membuat segitiga bantu yang siku-siku maka ilustrasi di atas dapat digambarkan menjadi:

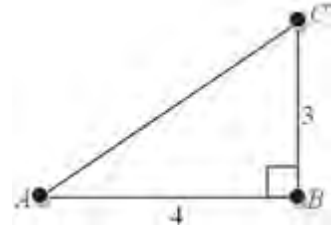
Dengan memakai prinsip teorema Pythagoras, pada segitiga siku-siku ABC , maka dapat diperoleh panjang dari titik A dan C , yaitu:

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$AC = \sqrt{25}$$

$$AC = 5.$$



Gambar 9.7 Segitiga siku-siku

Dari hasil di atas disimpulkan bahwa jarak antara titik A dan C adalah 5, maka jarak antara rumah Andi dan Cintia diperoleh 5 km.



Masalah-9.3

Seorang satpam sedang mengawasi lalu lintas kendaraan dari atap suatu gedung apartemen yang tingginya 80 m mengarah ke lapangan parkir. Ia mengamati dua buah mobil yang sedang melaju berlawanan arah. Terlihat mobil A sedang bergerak ke arah Utara dan mobil B bergerak ke arah Barat dengan sudut pandang masing-masing sebesar 50° dan 45° .

Berapa jarak antar kedua mobil ketika sudah berhenti di setiap ujung arah?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

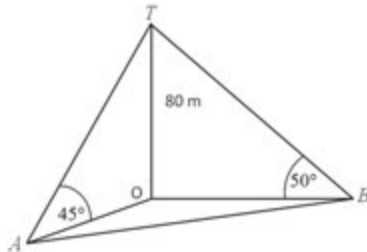
Misalkan: Mobil A = titik A , memiliki sudut pandang 50°

Mobil B = titik B , memiliki sudut pandang 45° .

Tinggi gedung = 80 m

Ditanya: Jarak antar kedua mobil sesudah berhenti?

Perhatikan ilustrasi masalah dalam gambar berikut.



Gambar 9.8 Posisi mobil dari gedung

Dari Gambar 9.8, kita memfokuskan perhatian terhadap segitiga AOT dan segitiga BOT . Pada segitiga TAO , panjang AO dapat ditentukan dengan menggunakan perbandingan tangen.

$$\tan 45^\circ = \frac{OT}{AO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{OT}{\tan 45^\circ} = 80$$

Pada segitiga TOB ,

$$\tan 90^\circ = \frac{OT}{BO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow BO = \frac{OT}{\tan 50^\circ} = 67,22$$

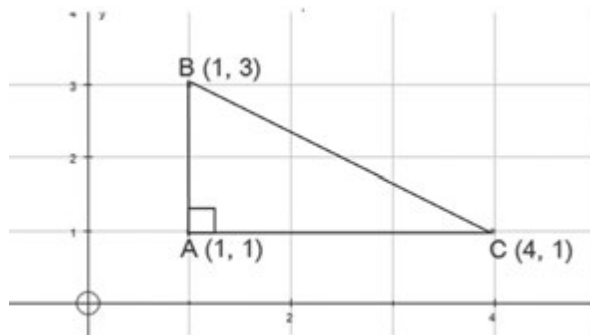
Masih dengan menggunakan teorema Pythagoras pada segitiga AOB , diperoleh

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2} \\ &= \sqrt{(80)^2 + (67,22)^2} \\ &= \sqrt{10918,52} \\ &= 104,49 \end{aligned}$$

Maka diperoleh, jarak antara kedua mobil tersebut adalah 104,49 m.

Contoh 9.2

Perhatikan posisi titik titik berikut ini!



Gambar 9.9 Koordinat titik A, B, dan C

Jarak titik $A(1,1)$ ke $C(4,1)$ dapat ditentukan melalui formula,

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3.$$

Dengan cara yang sama, kamu dapat tunjukkan panjang segmen garis AB dan BC , yaitu 2 dan $\sqrt{13}$.

Tentunya panjang ketiga segmen AB , BC , dan AC memenuhi Theorema Pythagoras. (Silahkan tunjukkan!).

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan.

Rumus 9.1

Titik A , B , dan C adalah titik-titik sudut segitiga ABC dan siku-siku di C , maka jarak antara titik A dan B adalah:

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$

c. Jarak Titik ke Garis

Seperti diuraikan di awal bab ini, kamu pasti sudah mengetahui kedudukan titik terhadap garis. Terdapat dua kemungkinan titik pada garis, yaitu titik terletak pada garis atau titik berada di luar garis. Titik dikatakan terletak pada garis, jika titik tersebut dilalui oleh garis. Dalam hal ini, jarak titik ke garis adalah nol. Dari Gambar 9.10, kita dapat melihat bahwa titik A dan B terletak pada garis g . Titik A dan titik B dikatakan sebagai titik yang segaris atau *kolinear*.



Gambar 9.10 Titik terletak pada garis

Untuk selanjutnya mari kita cermati kemungkinan jarak titik yang tidak terletak pada suatu garis, dengan kata lain kita akan mengkaji jarak titik terhadap garis dengan kegiatan dan permasalahan berikut.



Masalah-9.4

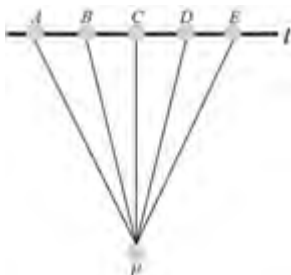


Gambar 9.11 Lapangan sepakbola

Bentuklah tim kelompokmu, kemudian pergilah ke lapangan sepakbola yang ada di sekolahmu. Ambil alat ukur sejenis meteran yang digunakan untuk mengukur titik penalti terhadap garis gawang. Ukurlah jarak antara titik penalti terhadap titik yang berada di garis gawang, lakukan berulang-ulang sehingga kamu menemukan jarak yang minimum antara titik penalti dengan garis gawang tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Jika dimisalkan titik penalti adalah titik P dan garis gawang merupakan garis lurus l . Tentukanlah beberapa titik yang akan diukur, misalkan titik-titik tersebut adalah A, B, C, D , dan E . Kemudian ambil alat ukur sehingga kamu peroleh jarak antara titik P dengan kelima titik tersebut. Isilah hasil pengukuran kamu pada tabel yang tersedia.



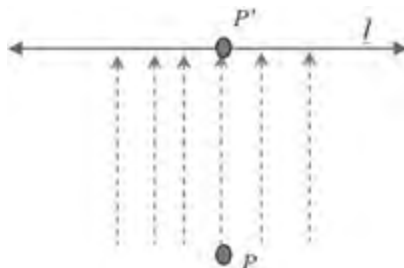
Gambar 9.12 Jarak titik

Tabel 8.1 Jarak Titik Penalti

Titik	Jarak
P dan A	
P dan B	
P dan C	
P dan D	
P dan E	

Apakah panjang ruas garis PA, PB, PC, PD, PE , adalah sama? Menurutmu, bagaimana menentukan jarak dari titik P ke garis l ? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Sekarang, coba kamu bayangkan ada cahaya yang menyinari titik P tepat di atasnya. Tentu saja akan diperoleh bayangan titik P pada garis, yaitu P' . Untuk itu kita dapat mengatakan bahwa panjang PP' merupakan jarak titik P ke garis l . Sedangkan, P' merupakan proyeksi titik P pada garis l . Jadi, jarak titik p ke garis l adalah PP' .



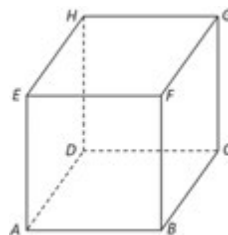
Gambar 9.13 Proyeksi titik P pada garis l



Contoh 9.3

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Tentukan proyeksi titik A pada garis

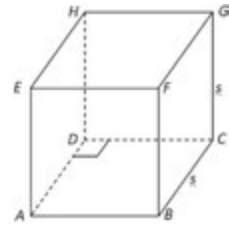
- CD !
- BD !



Gambar 9.14 Kubus $ABCEFGH$

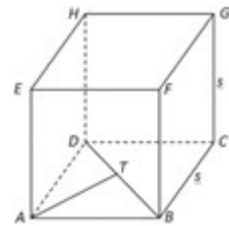
Penyelesaian

- a. Proyeksi titik A pada garis CD
 Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis CD maka diperoleh titik D sebagai hasil proyeksinya ($AD \perp CD$).



Gambar 9.15 Proyeksi titik A pada garis CD

- b. Proyeksi titik A pada garis BD
 Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis BD maka diperoleh titik T sebagai hasil proyeksinya ($AT \perp BD$).



Gambar 9.16 Proyeksi titik A pada garis BD

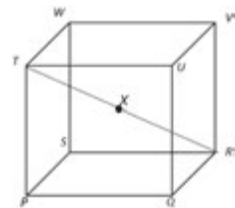
Contoh 9.4

Sebuah kubus $PQRS.TUVW$, panjang rusuknya 4 cm. Titik X terletak pada pusat kubus tersebut, seperti yang disajikan pada Gambar 9.17.

- Mintalah penjelasan dari gurumu tentang arti titik pusat kubus (bangun ruang).

Hitunglah jarak antara

- titik R dan X
- titik X dan garis PQ



Gambar 9.17 Kubus $PQRS.TUVW$ dengan titik pusat X

Penyelesaian

Diketahui panjang rusuk kubus $a = 4$ cm.

- i. Karena X adalah titik tengah ruas garis RT , maka jarak $RX = \frac{1}{2} RT$. RT merupakan diagonal ruang kubus sehingga berdasarkan sifat kubus, panjang diagonal ruang kubus adalah $a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ sehingga,

$$RX = \frac{1}{2} RT$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \\
 &= 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Diperoleh, jarak titik R ke X adalah $2\sqrt{3}$ cm.

ii. Perhatikan gambar berikut.



Jarak antara X dan PQ adalah panjang ruas garis XX' . Dengan menggunakan segitiga siku-siku $XX'Q$, kita akan menentukan panjang XX' .

$X'Q = \frac{1}{2} PQ = 2$, sementara $XQ = \frac{1}{2} QW = 2\sqrt{3}$ sehingga

$$\begin{aligned}
 XX' &= \sqrt{(XQ)^2 - (X'Q)^2} \\
 &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} \\
 &= \sqrt{12 - 4} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Jadi, jarak antara titik X ke PQ adalah $2\sqrt{2}$ cm.

d. Jarak Titik Ke Bidang

Dalam satu bidang, kita dapat menemukan titik-titik dan membentuk garis. Mari kita cermati masalah berikut ini yang terkait dengan masalah jarak titik terhadap suatu bidang.

Masalah-9.5

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 9.18 Seorang pemanah sedang melatih kemampuan memanah

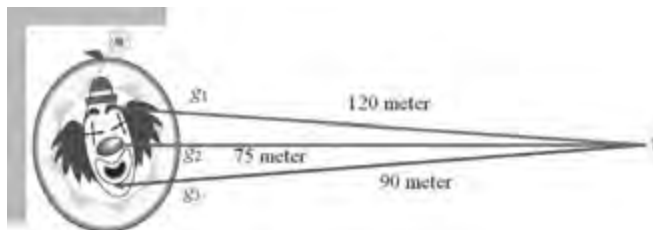
Tino, seorang atlet panahan, sedang mempersiapkan diri untuk mengikuti satu pertandingan besar tahun 2012. Pada satu sesi latihan di *sport center*, mesin pencatat kecepatan menunjukkan, kecepatan anak panah 40 m/det, dengan waktu 3 detik, tetapi belum tepat sasaran.

Oleh karena itu, Tino, mencoba mengganti jarak posisi tembak semula terhadap papan target sedemikian sehingga mampu menembak tepat sasaran, meskipun kecepatan dan waktu berubah sesuai dengan perubahan jarak.

Berapakah jarak minimal posisi Tino terhadap target?

Alternatif Penyelesaian

Tentunya, lintasan yang dibentuk anak panah menuju papan target berupa garis lurus. Keadaan tersebut dapat kita ilustrasikan sebagai berikut.



Kondisi awal, jarak antara posisi Tino terhadap papan target dapat diperoleh dari rumusan berikut.

$$s = v.t \Leftrightarrow 3 \times 40 = 120 \text{ m.}$$

Dari dua hasil pergantian posisi, pada tembakan ketiga, dengan posisi 75 m, Tino berhasil menembak pusat sasaran pada papan target.

Posisi Tino, dapat kita sebut sebagai posisi titik T , dan papan target kita misalkan suatu bidang yang diletakkan dengan p satuan jarak dari titik T .

Cermati garis g_1 , walaupun panjang garis itu tersebut adalah 120 meter, bukan berarti garis tersebut menjadi jarak titik T terhadap papan target. Sama halnya dengan garis g_3 , bukan berarti jarak Tino terhadap papan target sebesar 90 meter. Tetapi panjang garis g_2 , merupakan jarak titik T terhadap papan target.

Jadi, metode menghitung jarak antara satu objek ke suatu bidang harus membentuk lintasan garis lurus yang tegak lurus terhadap bidang.



Masalah-9.6

Suatu perusahaan iklan, sedang merancang ukuran sebuah tulisan pada sebuah spanduk, yang akan dipasang sebuah perempatan jalan. Tulisan/ikon pada spanduk tersebut diatur sedemikian sehingga, setiap orang (yang tidak mengalami gangguan mata) dapat melihat dan membaca dengan jelas spanduk tersebut. Ilustrasi keadaan tersebut diberikan pada Gambar 9.19 berikut ini.

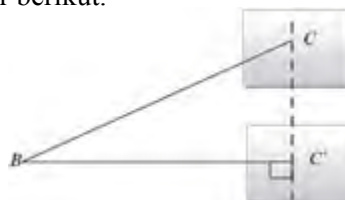


Gambar 9.19 Sudut pandang dua orang terhadap suatu spanduk

Pada Gambar 9.19, jarak titik A terhadap spanduk adalah panjang garis AC , karena garis AC tegak lurus terhadap bidang spanduk. Panjang garis BC bukanlah jarak sesungguhnya jarak si B terhadap spanduk. Untuk menentukan jarak si B terhadap bidang (spanduk), diilustrasikan pada gambar berikut.

Titik C' merupakan proyeksi titik C pada bidang yang sama (spanduk). Jadi jarak sebenarnya titik B terhadap spanduk sama dengan jarak titik B terhadap titik C' .

Jelasnya untuk keadaan ini, teorema Pythagoras berperan untuk menyelesaikan masalah jarak.



Gambar 9.20 Jarak titik B ke titik C



Definisi 9.2



Misalkan X adalah suatu bidang datar, dan titik P merupakan sebuah titik yang berada diluar bidang X . Jarak antara titik P terhadap bidang X , merupakan jarak titik P ke titik berat bidang X .

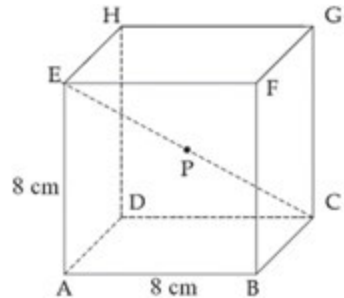


Contoh 9.5

Perhatikan kubus di samping.
Kubus $ABCD.EFGH$, memiliki panjang rusuk 8 cm.
Titik P terletak pada pusat kubus tersebut.

Hitunglah jarak

- Titik B ke P !
- Titik P ke BC !



Gambar 9.21 Kubus $ABCD.EFGH$ titik pusat P

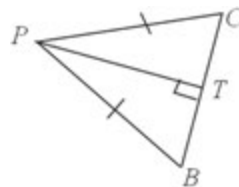
Penyelesaian

Cermati gambar kubus di atas. Tentunya, dengan mudah kamu dapat menentukan bahwa panjang $AC = 8\sqrt{2}$ cm, dan panjang diagonal ruang $CE = 8\sqrt{3}$ cm.

- Karena P merupakan titik terletak pada pusat kubus, maka panjang segmen garis

$$BP = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} CE = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

- Jarak titik P terhadap BC , berarti kita akan menghitung jarak titik terhadap garis. Lebih jelas kondisi tersebut, cermati segitiga sama kaki BPC pada Gambar 9.22



$$\begin{aligned} PB &= PC = 4\sqrt{3} \\ BC &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Gambar 9.22 Segitiga sama kaki BPC

Dari Gambar 9.22 di atas berlaku:

$$PT^2 = PB^2 - BT^2$$

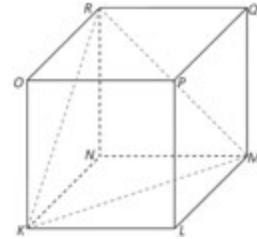
$$PT^2 = (5\sqrt{3})^2 - (4)^2 = 32$$

$$PT = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

- Tolong tentukan ulang jarak titik P terhadap garis BC , dengan menggunakan cara lain. Pastikan hasil yang kamu peroleh sama dengan hasil perkerjaan di atas!

Contoh 9.6

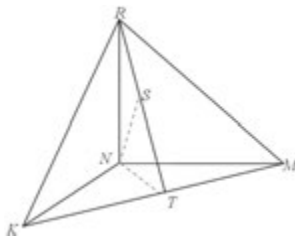
Sebuah kubus $KLMN.OPQR$ memiliki panjang rusuk 6 cm. Perhatikan segitiga KLR , tentukanlah jarak titik N ke bidang KMR



Gambar 9.23 Kubus $KLMN.OPQR$

Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan persoalan di atas, ada baiknya kita mendeskripsikan sebagai berikut.



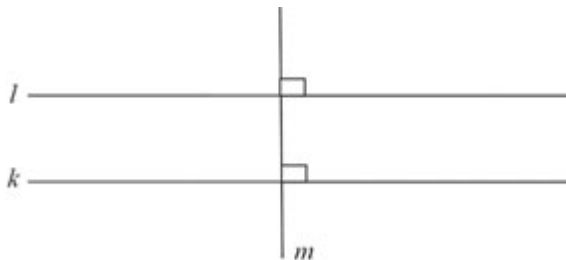
$$\begin{aligned} KM &= 6\sqrt{2} \text{ cm} \\ RT &= 3\sqrt{6} \text{ cm} \\ NT &= 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Sekarang, cermati bahwa segitiga KMR menjadi bidang penghubung menentukan panjang titik N ke bidang KMR , yaitu NS . Dengan menggunakan perbandingan panjang rusuk segitiga, maka berlaku:

$$NT.NR = RT.NS \Leftrightarrow 3\sqrt{2}.6 = 3\sqrt{6}.NS, \text{ sehingga diperoleh: } NS = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

e. Jarak antara Dua Garis dan Dua Bidang yang Sejajar

Mari kita cermati gambar berikut ini.



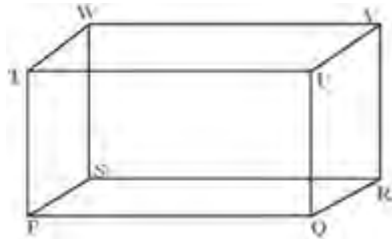
Gambar 9.24 Dua garis sejajar, k dan l dipotong secara tegak lurus oleh garis m

Garis k dan l dikatakan sejajar jika jarak antara kedua garis tersebut selalu sama (konstan), dan jika kedua garis tidak berhimpit, maka kedua garis tidak pernah berpotongan meskipun kedua garis diperpanjang. Nah, sekarang kita akan memperhatikan rusuk-rusuk yang sejajar dalam suatu bangun ruang.

Misalnya, Balok $PQRS.TUVW$ pada Gambar 9.25, semua rusuk pasangan rusuk yang sejajar pasti sama panjang. Misalnya, rusuk PQ sejajar dengan RS , yang terletak pada bidang $PQRS$.

Lebih lanjut, bidang $PSTW$ sejajar dengan bidang $QRVU$, dan jarak antara kedua bidang tersebut adalah panjang rusuk yang menghubungkan kedua bidang.

Rusuk PQ memotong rusuk QU dan QR secara tegak lurus, maka sudut segitiga PQR adalah 90° .



Gambar 9.25 Balok $PQRS.TUVW$



Uji Kompetensi 9.1

- Diketahui kubus $PQRS.TUVW$ dengan panjang rusuk 5 cm. Titik A adalah titik tengah RT . Hitunglah jarak antara
 - titik V dan titik A !
 - titik P dan A !
 - titik A dan garis SQ !
 - titik Q dan garis RW !
 - titik P dan garis RT !
- Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm, dan $BF = 10$ cm. Hitunglah jarak antara
 - titik B dan bidang $ACGE$!
 - titik G dan bidang $CDEF$!
- Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. misalkan AD memotong BC di titik P di antara kedua garis. Jika $AB = 4$ satuan luas dan $CD = 12$ satuan, berapa jauh titik P dari garis CD ?
- Diberikan persegi panjang $PQRS$. titik Q terletak di dalam $PQRS$ sedemikian rupa sehingga $OP = 3$ cm, $OQ = 12$ cm. panjang OR adalah ...
- Tentukan jarak antara titik R dengan bidang PWU pada kubus $PQRS.TUVW$! Panjang rusuk kubus 12 cm.
- Balok $ABCD.PQRS$ memiliki rusuk alas $AB = 4$ cm, $BC = 3\sqrt{2}$ cm, dan rusuk tegak $AP = 2\sqrt{6}$ cm. Tentukan
 - jarak antara QR dan AD !
 - jarak antara AB dan RS !



Projek

Himpunlah permasalahan teknik bangunan, ekonomi, dan masalah nyata disekitarmu yang melibatkan titik, garis, bangun datar dan bangun ruang. Selidikilah sifat-sifat geometri di dalam permasalahan tersebut dan ujilah kebenarannya. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sudut pada Bangun Ruang

Jika kita memperhatikan sudut yang dibentuk oleh rusuk-rusuk pada kubus dan balok, semua sudut yang terbentuk adalah sebesar 90° , atau sudut siku-siku. Selanjutnya, pada subbab ini, kita akan mengkaji sudut yang terbentuk pada bangun lain misalnya limas atau kerucut.

Mari kita cermati masalah di bawah ini.



Masalah-9.7



Gambar 9.25 Gambar Candi Borobudur

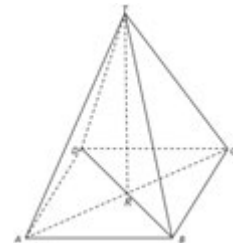
Candi Borobudur merupakan salah satu aset budaya Indonesia yang berharga dan terkenal. Mungkin, tujuan parawisata ini bukanlah sesuatu hal yang baru bagi kamu. Tetapi, tahukah kamu ukuran candi tersebut? Ternyata, luas bangunan candi adalah $123 \text{ m} \times 123 \text{ m}$ dengan tinggi bangunan $34,5 \text{ m}$ dan memiliki 1460 relief, 504 Arca Buddha, serta 72 stupa. Candi Borobudur memiliki 10 tingkat (melambangkan sepuluh tingkatan *Bodhisattva* yang harus dilalui untuk mencapai kesempurnaan menjadi Buddha) terdiri dari 6 tingkat berbentuk bujur sangkar, 3 tingkat berbentuk bundar melingkar, dan sebuah stupa utama sebagai puncaknya.

Alternatif Penyelesaian

Jika kita mengamati kerangkanya, candi tersebut berbentuk limas persegi, seperti yang diilustrasikan berikut ini.

Karena alas Candi Borobudur berbentuk persegi, maka panjang $AB = BC = CD = AD = 123 \text{ m}$, dan tinggi candi, yaitu $34,5 \text{ m}$ atau $TR = 34,5 \text{ m}$.

Garis tinggi TR memotong diagonal AC dan DB secara tegak lurus. Oleh karena itu, pada segitiga TAR berlaku



Gambar 9.26 Limas $T.ABCD$

$TR^2 + AR^2 = TA^2$, 20 dengan $AR = \frac{123\sqrt{2}}{2}$ m dan $TR = 34,5$ m, sehingga diperoleh:

$$TA^2 = \left(\frac{123\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (34,5)^2$$

$$TA^2 = 11346,75 + 1190,25 = 12537$$

$$TA = \sqrt{12537} = 111,968 \approx 112 \text{ m.}$$

Karena bidang $ABCD$ merupakan persegi, berlaku bahwa $TA = TB = TC = TD = 112$ m. Selanjutnya, untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh TA terhadap bidang alas, mari kita perhatikan segitiga TAR. Dengan menggunakan perbandingan cosinus, berlaku

$$\cos A = \frac{AR}{TA} = \frac{61,5\sqrt{2}}{112} = 0,77.$$

Dengan menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, nilai $\arcsin A = 39,5^\circ$. Jelasnya besar sudut TAR , TBR , TCR , dan TDR adalah sama besar, yaitu $39,5^\circ$. Jadi, sudut kemiringan yang dibentuk sisi miring dari dasar candi ke puncak candi adalah sebesar $39,5^\circ$.

Sedangkan besar sudut yang terbentuk di puncak candi, dapat kita tentukan dengan menentukan besar sudut ATR pada segitiga siku-siku TAR . Dengan menggunakan perbandingan tangen, dinyatakan

$$\tan \angle ATR = \frac{AR}{TR} = \frac{61,5\sqrt{2}}{34,5} = 2,52.$$

Nilai $\arctan \angle ATR = 68,35^\circ$.

Jelasnya, besar $\angle BTR = \angle CTR = \angle DTR \approx 68,35^\circ$.

Jadi besar sudut dipuncak candi merupakan $\angle ATC$ atau besar $\angle BTD$, yaitu sebesar $2 \cdot (\angle ATR) = 136,7^\circ$.

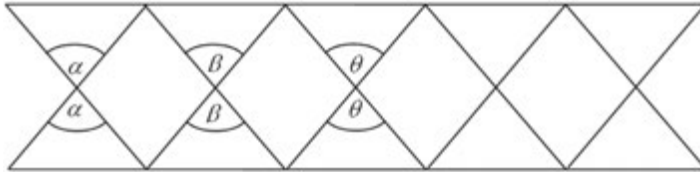
Perhatikan Ilustrasi berikut!

Gambar di samping menunjukkan kondisi sebuah jembatan dengan kerangka besi.

Susunan besi-besi pada jembatan membentuk sudut-sudut. Jika keadaan tersebut, ditungkan dalam kajian geometris, sudut-sudut terbentuk diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 9.27 Jembatan dengan tiang penyangga besi

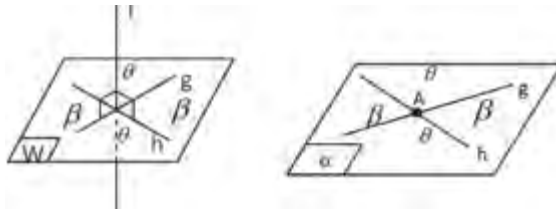


Gambar 9.28 Ilustrasi beberapa dua garis berpotong menghasilkan sudut yang sama besar

Pada satu bidang, hasil perpotongan satu garis berwarna hitam dengan satu garis berwarna, menghasilkan dua sudut yang masing-masing besarnya sama. Hubungan kedua sudut yang sama besar ini disebut dua sudut yang bertolak belakang. Secara umum, dapat kita tuliskan sifat-sifat sudut yang dihasilkan dua garis dalam bidang sebagai berikut.

Sifat dua garis dalam satu bidang yang sama

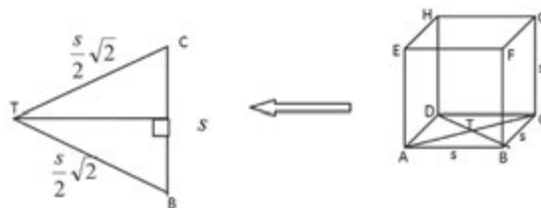
Misalkan garis k dan garis l berpotongan secara sembarang, maka pasangan sudut yang dihasilkan (ada dua pasang) besarnya sama.



Contoh 9.7

Tentukanlah besar sudut yang dibentuk diagonal bidang $ABCD$ pada suatu balok $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk s cm.

Penyelesaian



Cermati segitiga BTC , dengan menggunakan perbandingan sinus bahwa:

$$\sin B = \frac{TS}{TB} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{s}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Maka $\arcsin B = 45^\circ$, artinya besar sudut $B = 45^\circ$. Karena $TB = TC$, maka besar sudut $C = 45^\circ$. Akibatnya, besar sudut $BTC = 90^\circ$.

Meskipun terdapat 4 segitiga yang terbentuk pada bidang alas kubus $ABCD.EFGH$, kondisinya berlaku sama untuk setiap sudut yang terkait titik perpotongan diagonal bidang $ABCD$.

a. Sudut antara Dua Garis dalam Ruang

Ilustrasi.

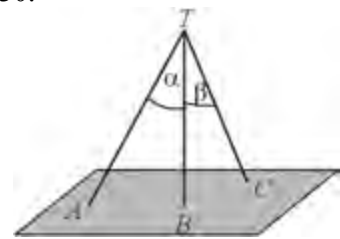


Gambar 9.29 Tiang bendera

Satu tim pramuka membuat tiang bendera dari tiga tongkat dan tali pandu. Tiang bendera tersebut disambung dan diikat menjadi sebuah tiang. Tiang tersebut berdiri tegak dengan bantuan tali yang diikat pada tongkat dan ditarik dengan kuat ke pasak yang sudah ditancapkan ke tanah ketiga arah. Perhatikan Gambar 9.29.

Mari kita misalkan tiang bendera dan tali tersebut adalah sebuah garis. Gambar di atas dapat kita sketsa kembali dengan lebih sederhana. Perhatikan Gambar 9.30.

TB adalah tiang bendera dengan TC dan TA adalah tali pandu. Dari Gambar 9.30, jelas kita lihat bahwa sudut yang dibentuk oleh TB dan TA adalah α dan sudut yang dibentuk oleh TB dan TC adalah β .



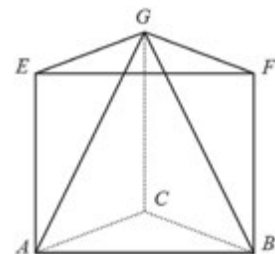
Gambar 9.30 Sudut pada 2 garis



Contoh 9.8

Sebuah prisma segitiga $ABC.EFG$ dengan alas berupa segitiga sama sisi ABC dengan sisi 6 cm dan panjang rusuk tegak 10 cm. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk:

- Garis AG dan garis BG !
- Garis AG dan garis AB !



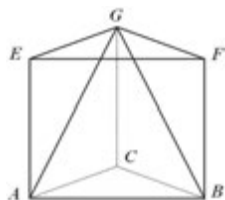
Gambar 9.31 Prisma segitiga $ABC.EFG$

Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 9.31

$$AB = BC = AC = 6 \text{ cm}$$

$$AE = BF = CG = 10 \text{ cm}$$



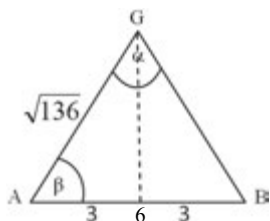
Perhatikan segitiga AEG siku-siku di E sehingga dengan teorema Pythagoras:

$$AG = \sqrt{AE^2 + EG^2}$$

$$AG = \sqrt{100 + 36}$$

$$AG = \sqrt{136}$$

Perhatikan segitiga sama kaki AGB .



Dengan perbandingan nilai cosinus, diperoleh:

$$\cos \beta = \frac{AG^1}{AG} = \frac{3}{\sqrt{136}}$$

$$= 0,257247878$$

$$\beta = \arccos 0,257247878$$

$$= 75,09^\circ$$

Karena $\triangle AGB$ adalah segitiga sama kaki, maka nilai α adalah sebagai berikut.

$$\angle AGB = \alpha = 180 - 2 \angle GAB$$

$$= 180 - 2\beta$$

$$= 180 - 2(75,09)$$

$$= 360 - 150,18$$

$$= 29,82$$

Berarti besar sudut α adalah $29,82^\circ$.



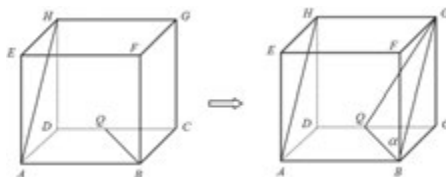
Contoh 9.9

Perhatikan gambar! Pada balok $ABCD.EFGH$, titik Q di tengah CD . Jika panjang $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ dan $CG = 8 \text{ cm}$. Berapakah besar sudut antara garis AH dan BQ ?

Penyelesaian

Perhatikan gambar!

Untuk mendapatkan sudut yang dibentuk oleh garis AH dan BQ , kita perlu menggeser garis AH sepanjang rusuk EF sehingga garis



Gambar 9.32 Kubus $ABCD.EFGH$

AH dapat diwakili garis BG . Sudut yang dibentuk adalah α .

Perhatikan segitiga BCQ , siku-siku di C ; $BC = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Pythagoras diperoleh.

$$BQ = \sqrt{BC^2 + CQ^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

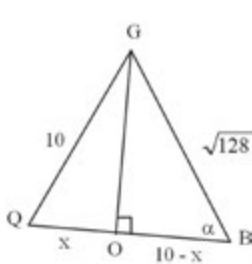
Perhatikan segitiga BFQ , siku-siku di F ; $BF = 8$; $FG = 8$ sehingga dengan teorema Pythagoras diperoleh.

$$BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$$

Perhatikan segitiga QCG , siku-siku di C ; $CG = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Pythagoras diperoleh.

$$QG = \sqrt{QC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Perhatikan segitiga QBG dengan α adalah sudut garis QB dan BG . Dengan teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku QOG dan BOG ,



$$\sqrt{QG^2 - QO^2} = \sqrt{BG^2 - BO^2}$$

$$\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{128 - (10 - x)^2}$$

$$100 - x^2 = 128 - (10 - x)^2$$

$$100 - x^2 = 128 - 100 + 20x - x^2$$

$$100 = 28 + 20x$$

$$72 = 20x \text{ atau } x = 3,6$$

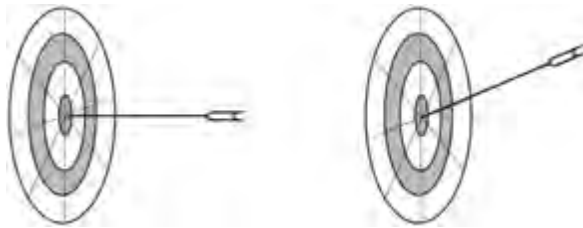
Perhatikan segitiga BOG siku-siku di O , sehingga:

$$\cos \alpha = \frac{10 - x}{\sqrt{128}} = \frac{6,4}{\sqrt{128}} \approx 0,57 \text{ atau } \alpha = \arccos(0,57) = 55,55^\circ.$$

b. Sudut antara Garis dan Bidang pada Bangun Ruang

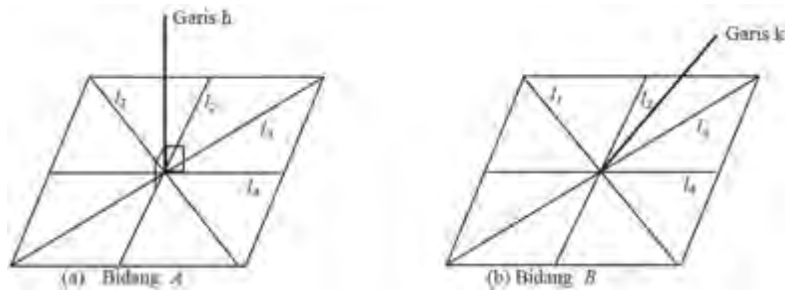
Ilustrasi 1

Dua orang pemanah sedang latihan memanah di sebuah lapangan. Kedua pemanah tersebut berhasil memanah tepat pada sasaran. Masing-masing anak panah menancap tepat di pusat sebuah bidang sasaran seperti pada Gambar 9.33 berikut!



Gambar 9.33 Anak panah

Bagaimana pengamatanmu? Tentu, kita mengatakan kedua anak panah menancap tepat pada sasaran, yaitu pada pusat bidang. Tetapi, coba kamu perhatikan posisi kedua anak panah tersebut terhadap bidang. Posisi kedua anak panah tersebut tentu sangat berbeda. Mari kita misalkan anak panah tersebut adalah sebuah garis dan papan target anak panah adalah sebuah bidang (sebut bidang A dan B serta garis h dan k) sehingga kita ilustrasikan kembali posisi anak panah tersebut seperti gambar berikut.

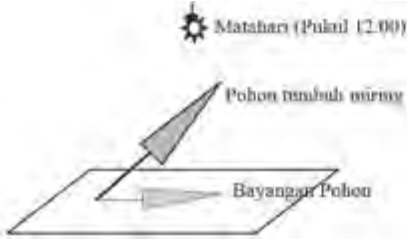


Gambar 9.34 Perpotongan garis dengan bidang di satu titik

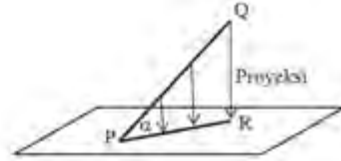
Dengan demikian, anak panah yang menancap pada bidang adalah sebuah ilustrasi bahwa sebuah garis dapat memotong sebuah bidang di satu titik. Perhatikan Gambar 9.34 (a), garis h selalu tegak lurus terhadap semua garis yang ada pada bidang, sehingga garis h disebut tegak lurus terhadap bidang. Garis yang tegak lurus pada bidang, kita sebut membentuk sudut 90° terhadap bidang. Perhatikan Gambar 9.34 (b). Garis k tidak tegak lurus terhadap bidang atau garis k tidak membentuk sudut 90° terhadap bidang tetapi membentuk sudut yang lain dengan bidang. Dapatkah kamu menentukan besar sudut yang tersebut? Mari kita pelajari ilustrasi berikut.

Ilustrasi 2

Perhatikan gambar!



Gambar 9.35 Bayangan pohon miring



Gambar 9.36 Proyeksi PQ ke bidang

Sebuah pohon tumbuh miring di sebuah lapangan. Pada siang hari pada pukul 12.00, matahari akan bersinar tepat di atas pohon tersebut sehingga bayangan pohon tersebut merupakan proyeksi orthogonal pada lapangan. Misalkan garis PQ adalah pohon sehingga proyeksi PQ adalah PR seperti gambar. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh PQ dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dengan proyeksinya pada bidang tersebut yaitu sudut QPR . Pada Gambar 9.35 disebut sudut α .



Masalah-9.8



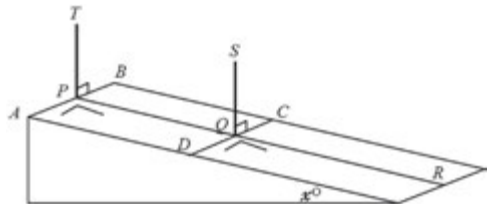
Gambar 9.37 Bidang miring

Perhatikan tangga berikut. Seorang bapak sedang berdiri di tangga dengan kemiringan x° . Dapatkah kamu tentukan sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan bidang miring?

Alternatif Penyelesaian

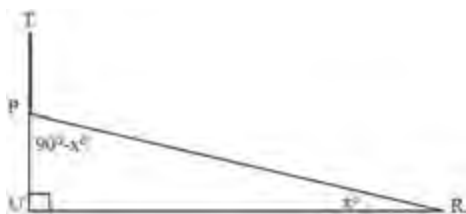
Mari kita sederhanakan sketsa bidang miring tersebut.

Misalkan PT atau QS adalah tinggi badan bapak tersebut. Kita ambil sebuah AB sehingga PT tegak lurus dengan AB dan garis DC segubgga QS tegak lurus dengan DC .



Gambar 9.38 Sketsa sederhana bidang miring 1

Perhatikan juga bahwa garis PR terletak pada bidang sehingga PR tegak lurus dengan PT ataupun pada QS . Dengan demikian garis PR akan mewakili bidang miring tersebut. Sudut yang dibentuk badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring akan diwakili oleh sudut yang dibentuk oleh garis PT dengan garis PR . Kita sederhanakan kembali sketsa di atas.



Gambar 9.39 Sketsa sederhana bidang miring

Perhatikan segitiga PUR dengan siku-siku di U atau sudut U adalah 90° .

$$\angle UPR + \angle PUR + \angle PRU = 180^\circ$$

$$\angle UPR + 90^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$\angle UPR = 90^\circ - x^\circ$$

Perhatikan bahwa sudut TPR adalah pelurus dengan sudut UPR sehingga:

$$\angle TPR + \angle UPR = 180^\circ$$

$$\angle TPR + 90^\circ - x^\circ = 180^\circ$$

$$\angle TPR = 90^\circ + x^\circ$$

Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring adalah $90^\circ + x^\circ$.

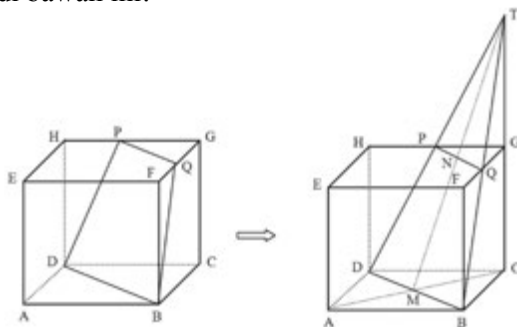


Contoh 9.10

Pada kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 12 cm. Titik P di tengah rusuk GH dan titik Q di tengah rusuk FG . Tentukanlah sudut antara garis CG dengan bidang $BDPQ$.

Penyelesaian

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 9.40 Kubus $ABCD.EFGH$

Jika kita perpanjang garis BQ , CG , dan DP maka ketiga garis akan berpotongan di satu titik T . Perhatikan segitiga sama kaki TBD . TM adalah garis tinggi.

Kamu tentu masih ingat konsep kesebangunan bukan. Perhatikan kesebangunan antara segitiga TBC dengan segitiga TQG , yaitu:

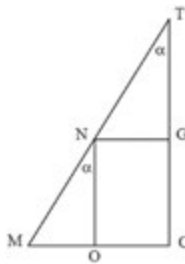
$$\begin{aligned} \frac{TG}{TC} = \frac{GQ}{CB} \text{ atau } \frac{TG}{TG+GC} = \frac{GQ}{CB} &\Leftrightarrow \frac{TG}{TG+12} = \frac{6}{12} \\ &\Leftrightarrow 2TG = TG + 12 \\ &\Leftrightarrow TG = 12 \end{aligned}$$

Perhatikan segitiga ABC , siku-siku di B

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \text{ atau } AC = \sqrt{12^2 + 12^2} \\ AC &= \sqrt{12^2 \times 2} \\ AC &= 12\sqrt{2} \\ \text{sehingga } CM &= \frac{AC}{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Perhatikan segitiga TCM , siku-siku di C

$$\begin{aligned} TM &= \sqrt{TC^2 + CM^2} \text{ atau } TM = \sqrt{(24)^2 + (6\sqrt{2})^2} \\ TM &= \sqrt{576 + 72} \\ TM &= \sqrt{648} \end{aligned}$$



Perhatikan segitiga TBD berpotongan dengan garis TC di titik T sehingga sudut yang dibentuk TBD dan garis TC adalah α . Kemudian

$$\text{perhatikan segitiga } TCM, \tan \alpha = \frac{MO}{ON} = \frac{CM}{TC} \tan \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Dengan menggunakan kalkulator maka

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = 19,5^\circ$$

Selain dicari dengan \tan , coba kamu cari dengan \sin dan \cos , apakah hasilnya sama?

c. Sudut antara Dua Bidang pada Bangun Ruang

Pada sub-bab ini, kita akan mencoba menemukan konsep sudut antara dua bidang pada bangun ruang. Marilah kita mengamati dan mempelajari ilustrasi berikut.

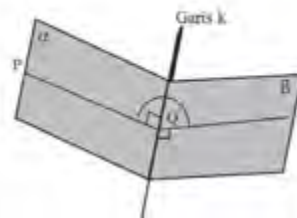
Ilustrasi 3

Perhatikan gambar buku berikut. Sebuah buku terdiri dari beberapa halaman terbuka seperti Gambar 9.41. Kumpulan tersebut sering disebut dengan berkas. Halaman per halaman merupakan bentuk dari sebuah bidang. Misalkan saja, kita ambil sampul buku depan dengan sampul belakang. Kita sebut sampul buku depan adalah bidang α dan sampul buku belakang adalah bidang β . Tentu saja anda sudah mengerti bahwa buku memiliki tulang buku, dan tulang buku tersebut dimisalkan dengan sebuah garis k .

Perhatikan gambar.



Gambar 9.41 Buku



Gambar 9.42 Berkas atau buku

Berdasarkan gambar di atas, kedua sampul buku berpotongan di tulang buku atau bidang α dan bidang β berpotongan di garis k . Perhatikan bahwa garis PQ tegak lurus dengan garis k dan garis RQ tegak lurus juga dengan garis k . Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh bidang α dan bidang β adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dan RQ .



Masalah-9.9

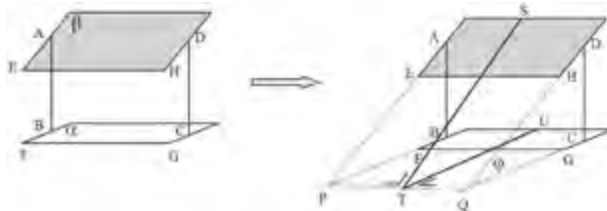


Gambar 9.43 Halte

Sebuah halte berbentuk seperti Gambar 9.43. Jika atap halte dibuat tidak sejajar dengan lantai maka dapatkan anda tentukan sudut yang dibentuk oleh atap dan lantai halte tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa gambar tersebut.



Gambar 9.44 Sketsa sederhana halte

Pengamatan kita terfokus pada bidang atap dan lantai. Kita sebut saja bidang lantai adalah bidang α dan bidang β . Karena bidang atap tidak dibangun sejajar maka sudah pasti bahwa kedua bidang pasti berpotongan dan membentuk sudut walaupun secara visual, kedua bidang tidak bersentuhan. Untuk mendapatkan garis perpotongan kedua bidang maka kita dapat memperpanjang rusuk-rusuk kedua bidang. Perhatikan gambar di sebelah kanan anda.

Rusuk AE diperpanjang menjadi AP

Rusuk BF diperpanjang menjadi BP

Rusuk DH diperpanjang menjadi DQ

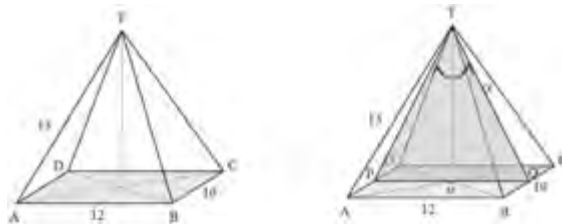
Rusuk CG diperpanjang menjadi CQ

Dari gambar dapat kita lihat, garis PQ adalah perpotongan kedua bidang. Garis ST tegak lurus dengan PQ dan garis UT juga tegak lurus dengan PQ . Dengan demikian, sudut antara bidang α dan bidang β adalah ϕ .

Contoh 9.11

Sebuah limas $T.ABCD$, dengan panjang $TA = 13$, $AB = 12$, $CD = 10$. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dengan bidang TBC , tentukanlah besar α .

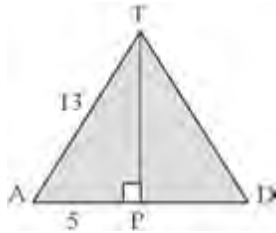
Penyelesaian



Gambar 9.45 Limas $T.ABCD$

Bidang TAD dan bidang TBC berpotongan pada titik T . Garis tinggi TAD adalah TP dan garis tinggi TBC adalah TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dan bidang TBC diwakili oleh garis tinggi TP dan TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh kedua bidang adalah sudut α .

Kemudian, kita akan mencari besar sudut α sebagai berikut.
Perhatikan segitiga TAD .



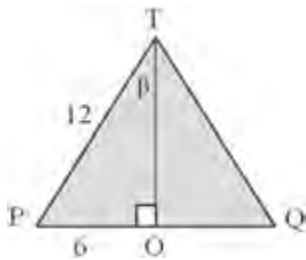
Dengan menggunakan teorema Pythagoras, maka:

$$TP = \sqrt{TA^2 - AP^2}$$

$$TP = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$TP = \sqrt{144} = 12$$

Perhatikan segitiga TPQ.



Dengan menggunakan perbandingan sinus, maka:

$$\sin \beta = \frac{PO}{TP} = \frac{6}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \text{ atau } \beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

Dengan demikian sudut $\alpha = 2\beta$ atau $\alpha = 60^\circ$.

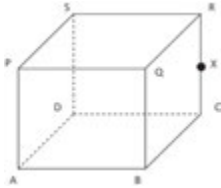


Uji Kompetensi 9.2

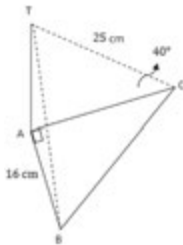
- Sebuah kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk p cm. Tentukanlah sudut antar bidang ACH dengan bidang ACF .
- Pada kubus $ABCD.EFGH$. Jika AP adalah perpanjangan rusuk AB sehingga $AB : BP = 2 : 1$ dan FQ adalah perpanjangan rusuk FG sehingga $FP : FG = 3 : 2$ maka tentukanlah jarak antara titik P dan Q .
- Pada kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk a cm. Tentukanlah jarak bidang ACH dengan bidang BEG .
- Perhatikan gambar berikut.

Tentukanlah besar sudut yang dibentuk oleh bidang $PQRSTU$ dengan alas $ABCD$. (Rusuk kubus p cm, untuk p bilangan real positif).

5. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 12 cm. Titik X berada di tengah rusuk CR . Hitunglah:



- Panjang AX
 - Besar sudut antara AX dan bidang alas
 - Besar sudut PXA
 - Besar sudut antara BS dan bidang alas
6. Segitiga ABC adalah segitiga yang terletak pada sebuah bidang datar, dengan sudut $BAC = 90^\circ$ dan panjang $AB = 16$ cm. Titik T terletak tepat di atas titik A . Sudut yang terbentuk antara TC dan AC adalah 40° , panjang TC adalah 25 cm.

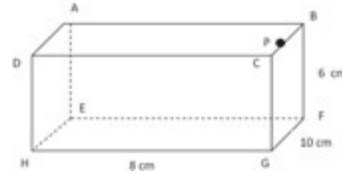


Hitunglah:

- Sudut yang terbentuk antara TB dan AB
 - Panjang AT
 - Panjang BC
7. Sebuah balok $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk-rusuk $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm, $BD = 10$ cm, dan $DH = 24$ cm. Hitunglah

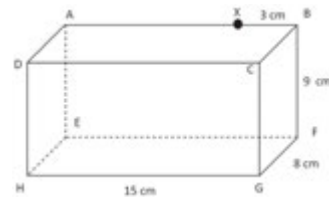
- Panjang HB
- Besar sudut BDC
- Besar sudut antara HB dan bidang $CDHG$
- Besar sudut antara HB dan bidang $ABCD$

8. Perhatikan gambar balok berikut



Hitunglah :

- Panjang HP jika P adalah tengah-tengah BC
 - Besar sudut antara HP dan $EFGH$
 - Besar sudut antara HP dan FG
 - Besar sudut antara DF dan bidang $EFGH$
9. Gambar di bawah ini merupakan balok dengan alas $EFGH$, dengan panjang $HG = 15$ cm, $GF = 8$ cm dan $BF = 9$ cm. Titik X berada pada rusuk AB yang berjarak 3 cm dari titik B . Hitunglah besar sudut HXG dan $ABFE$.



10. Sebuah limas berdiri setinggi 26 cm di atas bidang datar dengan alas berbentuk bidang segi enam

beraturan yang memiliki panjang rusuk 12 cm. Hitunglah

- Panjang rusuk dari piramid
- Besarnya sudut antara rusuk piramid dengan alas.

11. Jika diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$ dan $BF = 5$. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk bidang $ADHE$ dan bidang $BDHF$.

12. Pada limas beraturan $T.ABCD$, $TA = TB = TC = TD = \sqrt{3}$ dm dan $ABCD$ adalah persegi dengan sisi dm. Tentukanlah besar sudut antara bidang TAB dan bidang TCD .

13. Seorang pengamat mengamati dua buah perahu dari menara merkusuar. Perahu A bergerak ke arah Barat dengan sudut depresi 35° dan perahu B bergerak ke arah Utara dengan sudut depresi 40° . Jika tinggi merkusuar adalah 85 m dari permukaan laut, tentukan jarak antara kedua perahu tersebut.

14. Seorang lelaki berdiri di titik B , yang berada di Timur menara OT dengan sudut elevasi 40° . Kemudian ia berjalan 70 m ke arah Utara dan menemukan bahwa sudut elevasi dari posisi yang baru ini, C adalah 25° . Hitunglah panjang OB dan tinggi menara tersebut.



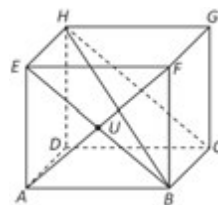
Projek

Perhatikan berbagai objek yang kamu temui di sekelilingmu. Pilihlah minimal tiga objek dan rancang masalah yang pemecahannya menerapkan sifat dan rumus jarak titik ke garis atau jarak titik ke bidang. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Pada kubus $ABCD.EFGH$, berlaku.

- Titik E terletak pada garis AE , EF , dan EH .
- Garis EF terletak pada bidang $ABFE$ dan $EFGH$.
- Titik E terletak pada bidang $ABFE$, $AEHD$, $EFGH$ yang memuat garis AE , EF , dan EH .
- Garis EF dan garis CD adalah dua garis yang sejajar.
- Garis AF dan garis BE adalah dua garis yang bersilangan.
- Garis EF dan CG adalah dua garis yang saling tegak lurus.



7. Garis EF sejajar dengan salah satu garis pada bidang $CDHG$, maka garis EF sejajar dengan bidang $CDGH$.
8. Garis EF tegak lurus dengan salah satu garis pada bidang $BCGF$, maka garis EF tegak lurus dengan bidang $BCGF$.
9. Bidang $ADHE$ berpotongan dengan bidang $BCHE$.
10. Bidang $ABFE$ berpotongan tegak lurus dengan bidang $ABCD$.
11. Bidang $ABFE$ sejajar dengan bidang $CDHG$.
12. Garis AF merupakan diagonal bidang $ABFE$
13. Garis BH merupakan diagonal ruang kubus $ABCD, EFGH$.
14. Bidang $BCHE$ merupakan bidang diagonal.
15. $\angle AUE = \angle BUF$ dan $\angle AUB = \angle EUF$.
16. Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut.
17. Jarak antara sebuah titik ke sebuah garis adalah jarak titik ke proyeksinya pada garis.
18. Jarak antara sebuah titik ke sebuah bidang adalah jarak titik ke proyeksinya pada bidang.
19. Jarak antara dua garis sejajar adalah jarak salah satu titik di salah satu garis ke garis yang lain.
20. Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis yang tegak lurus pada kedua garis tersebut.
21. Jarak antara dua bidang yang sejajar adalah jarak dari salah satu titik pada bidang yang satu ke bidang yang lain.
22. Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan proyeksinya pada bidang.

Kita telah mempelajari materi geometri tentang jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang serta penerapannya dalam pemecahan masalah nyata. Selanjutnya kita akan membahas materi tentang limit fungsi. Dalam bahasan ini kita akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi aljabar yang selanjutnya akan diuraikan dalam pemecahan masalah dan penyelesaian beberapa masalah dengan menggunakan beberapa sifat limit fungsi yang dipelajari.

Bab 10

Limit Fungsi

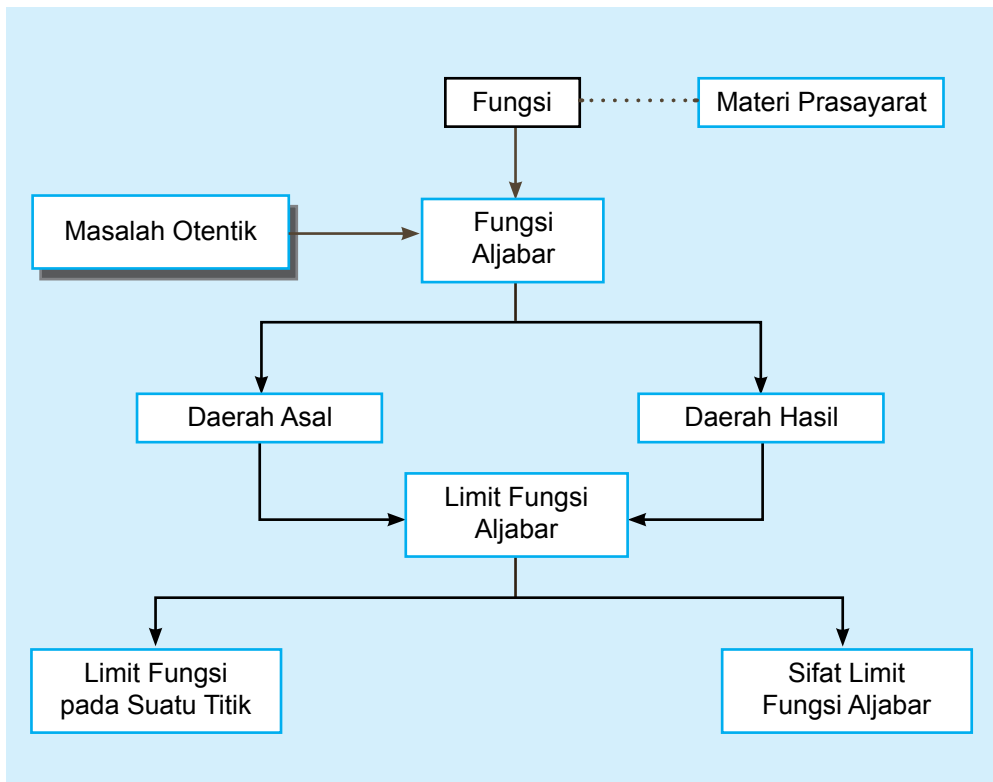
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu:</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis;3. memahami konsep limit fungsi aljabar dengan menggunakan konteks nyata dan menerapkannya;4. merumuskan aturan dan sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan contoh-contoh;5. memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang limit fungsi aljabar.	<p>Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• mampu berpikir kreatif;• mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan;• mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep;• mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan;• mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari;• siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- *Limit fungsi*
- *Pendekatan (kiri dan kanan)*
- *Bentuk tentu dan tak tentu*
- *Perkalian sekawan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisa data dan menarik kesimpulan. Perhatikan dan amatilah contoh ilustrasi berikut.

Ilustrasi



Gambar 10.1 Jalan Tol

Seorang Satpam berdiri mengawasi mobil yang masuk pada sebuah jalan tol. Ia berdiri sambil memandang mobil yang melintas masuk jalan tersebut. Kemudian dia memandang terus mobil sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut.

- ◆ Coba kamu lihat Gambar: 10.1. Kita melihat bahwa bukan hanya ukuran mobil di kejauhan yang seakan-akan semakin kecil, tetapi lebar jalan raya tersebut juga seakan-akan semakin sempit. Kemudian coba kamu analisis kembali gambar tersebut, secara visual, apakah perbandingan ukuran lebar jalan dengan ukuran mobil tersebut tetap? Berikan komentarmu!

Jika kita analisis lebih lanjut, untuk pendekatan berapa meterkah jauhnya mobil melintas agar penjaga pintu masuk jalan tol sudah tidak dapat melihatnya lagi? Berdiskusilah dengan teman-temanmu!

1. Menemukan Konsep Limit Fungsi

Kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep pendekatan suatu titik ke titik yang lain dengan mengamati dan memecahkan masalah.



Masalah-10.1

Perhatikan masalah berikut.



Gambar 10.2 Lebah

Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah pada sebuah lapangan. Pada suatu saat, lebah tersebut diamati terbang membentuk sebuah lintasan parabola. Setelah terbang selama 1 menit, lebah tersebut telah mencapai ketinggian maksimum sehingga ia terbang datar setinggi 5 meter selama 1 menit.

Pada menit berikutnya, lebah tersebut terbang menukik lurus ke tanah sampai mendarat kembali pada akhir menit ketiga.

- ◆ Coba kamu modelkan fungsi lintasan lebah tersebut!

Petunjuk:

- Model umum kurva parabola adalah $f(t) = at^2 + bt + c$, dengan a, b, c bilangan real.
- Model umum kurva linear adalah $f(t) = mt + n$ dengan m, n bilangan real.

- ◆ Amatilah model yang kamu peroleh. Tunjukkanlah pola lintasan terbang lebah tersebut?

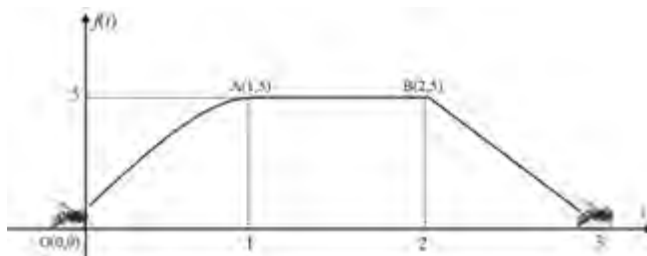
Petunjuk:

Pilihlah strategi numerik untuk menunjukkan pendekatan, kemudian bandingkan kembali jawaban kamu dengan strategi yang lain.

- ◆ Cobalah kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar dari ilustrasi Masalah 10.2



Gambar 10.3 Ilustrasi gerakan lebah

Jadi, model fungsi lintasan lebah tersebut berdasarkan gambar di atas adalah:

$$f(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{jika } 0 \leq t \leq 1 \\ 5 & \text{jika } 1 \leq t \leq 2 \\ mt + n & \text{jika } 2 \leq t \leq 3 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

dengan a, b, c, m, n bilangan real.

Dari ilustrasi, diperoleh data sebagai berikut.

- Misalkan posisi awal lebah pada saat hinggap di tanah adalah posisi pada waktu $t = 0$ dengan ketinggian 0, disebut titik awal $O(0,0)$,
- Kemudian lebah terbang mencapai ketinggian maksimum 5 meter pada waktu $t = 1$ sampai $t = 2$, di titik $A(1,5)$ dan $B(2,5)$.
- Pada akhir waktu $t = 2$, lebah kembali terbang menukik sampai hinggap kembali di tanah dengan ketinggian 0, di titik $C(3,0)$.

Berdasarkan data tersebut, kita akan menentukan fungsi lintasan lebah, dengan langkah-langkah berikut.

1. Substitusi titik $O(0,0)$ ke fungsi kuadrat $f(t) = at^2 + bt + c$ diperoleh $c = 0$.
2. Substitusi titik $A(1,5)$ ke fungsi kuadrat $f(t) = at^2 + bt + c$ diperoleh $a + b + c = 5$, karena $c = 0$, maka $a + b = 5$.
3. Karena fungsi kuadrat mencapai maksimum pada saat $t = 1$ maka $\frac{-b}{2a} = 1$ atau $b = -2a$.
4. Dengan mensubstitusi $b = -2a$ ke $a + b = 5$ maka diperoleh $a = -5$ dan $b = 10$.
5. Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah $f(t) = -5t^2 + 10t$.
6. Lebah tersebut terbang konstan pada ketinggian 5 maka fungsi lintasan tersebut adalah $f(t) = 5$.
7. Substitusi titik $B(2,5)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $5 = 2m + n$.
8. Substitusi titik $C(3,0)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $0 = 3m + n$ atau $n = -3m$.
9. Dengan mensubstitusi $n = -3m$ ke $5 = 2m + n$ maka diperoleh $m = -5$ dan $n = 15$.
10. Fungsi linear yang dimaksud adalah $f(t) = -5t + 15$.

Dengan demikian, model fungsi lintasan lebah tersebut adalah:

$$f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & \text{jika } 0 \leq t \leq 1 \\ 5 & \text{jika } 1 \leq t \leq 2 \\ -5t + 15 & \text{jika } 2 \leq t \leq 3 \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

Selanjutnya limit fungsi pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 10.1 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	5	5	5	5	5	5

Tabel 10.2 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
$f(t)$	5	5	5	5	5	5	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Dari pengamatan pada tabel, dapat kita lihat bahwa y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 2.

Perhatikan strategi lainnya. Mari perhatikan nilai fungsi pada t mendekati 1 dari kiri dan kanan, sebagai berikut:

I. Untuk t mendekati 1

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} -5t^2 + 10t = 5 \quad (\text{makna } t \rightarrow 1^- \text{ adalah nilai } t \text{ yang didekati dari kiri})$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} 5 = 5 \quad (\text{makna } t \rightarrow 1^+ \text{ adalah nilai } t \text{ yang didekati dari kanan})$$

Ternyata saat t mendekati 1 dari kiri, nilai fungsi $y = f(t) = -5t^2 + 10t$ mendekati 5. Demikian saat t mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Kita menuliskannya $\lim_{t \rightarrow 1^-} -5t^2 + 10t = 5 = \lim_{t \rightarrow 1^+} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1.

II. Untuk t mendekati 2

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} 5 = 5 \quad (\text{makna } t \rightarrow 2^- \text{ adalah nilai } t \text{ yang didekati dari kiri})$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} -5t + 15 = 5 \quad (\text{makna } t \rightarrow 2^+ \text{ adalah nilai } t \text{ yang didekati dari kanan})$$

Ternyata saat t mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Demikian juga saat t mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi $y = f(t) = -5t + 15$ mendekati 5. Hal ini dapat dinyatakan $\lim_{t \rightarrow 2^+} -5t + 15 = 5 = \lim_{t \rightarrow 2^-} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2.



Masalah-10.2

Tiga anak (sebut nama mereka: Ani, Budi dan Candra) sedang bermain tebak angka. Ani memberikan pertanyaan dan kedua temannya akan berlomba memberikan jawaban yang terbaik. Perhatikanlah percakapan mereka berikut.

Ani : **Sebutkanlah bilangan real yang paling dekat ke 3?**

Budi : 2

Candra : 4

Budi : 2,5

Candra : 3,5

Budi : 2,9

Candra : 3,1

Budi : 2,99

Candra : 3,01

Budi : 2,999

Candra : 3,001

Budi : 2,9999

Candra : 3,0001



Gambar 10.4 Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Alternatif Penyelesaian

Kedua teman Ani berlomba memberikan jawaban bilangan terdekat ke 3, seperti pada Gambar 10.4. Pada awalnya Budi dan Candra mengambil bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan sehingga mereka menjawab 2 dan 4. Ternyata masih ada bilangan real lain yang terdekat ke 3, sehingga Budi harus memberi bilangan yang lebih dekat lagi ke 3 dari kiri, maka Budi menyebut 2,5. Hal ini membuat Candra ikut bersaing untuk mencari bilangan lain, sehingga ia menjawab 3,5. Demikianlah mereka terus-menerus memberikan jawaban sebanyak mungkin sampai akhirnya mereka menyerah untuk mendapatkan bilangan-bilangan terdekat ke-3.

Berdasarkan pemahaman kasus ini, ternyata ketidakmampuan teman-teman Ani untuk menyebutkan semua bilangan tersebut telah membuktikan bahwa begitu banyak bilangan real di antara bilangan real lainnya. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan jawaban-jawaban Budi dan Candra maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 (secara matematika, dituliskan $x \rightarrow 3$).

Masalah-10.3



(A)

(B)

(C)

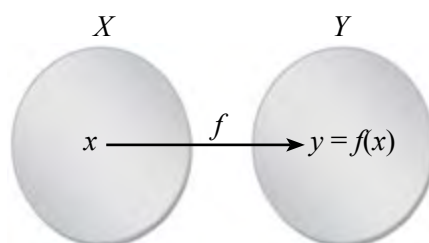
Gambar 10.5 Jembatan layang

Kata limit dapat dipandang sebagai nilai batas. Perhatikan ilustrasi berikut. Sebuah jembatan layang dibangun pada sebuah kota untuk mengatasi masalah kemacetan jalan raya. Setelah pondasi yang kokoh dibangun (Gambar 10.5 A), beberapa badan jembatan yang telah dibentuk dengan ukuran tertentu diangkat dan disambungkan satu sama lain pada setiap pondasi yang telah tersedia (Gambar 10.5 B) sehingga terbentuk sebuah jembatan layang yang panjang (Gambar 10.5 C). Tentu saja kedua blok badan jembatan yang terhubung mempunyai garis pemisah (Gambar 10.5 B).

Jika setiap pondasi merupakan titik-titik pada himpunan X dan badan jembatan merupakan kurva yang dipenuhi oleh fungsi $y = f(x)$ maka hubungan antara pondasi dan badan jembatan merupakan sebuah pemetaan atau fungsi.

Ingat kembali pengertian sebuah fungsi pada bab sebelumnya. Misalkan X dan Y adalah himpunan yang tidak kosong, $x \in X$, $y \in Y$, sebuah fungsi f memetakan setiap anggota himpunan X ke tepat satu anggota himpunan Y .

Pilih salah satu pondasi sebagai titik yang akan didekati. Lihat pada Gambar 10.5 B. Kita anggap garis pemisah pada persambungan kedua blok badan jembatan sebagai ilustrasi $x \neq c$.



Gambar 10.6 Pemetaan



Diskusi

Menurut kamu, apakah kedua blok badan jembatan tersebut mempunyai limit pada garis persambungan tersebut? Berikanlah komentar kamu! Diskusikanlah komentar kamu tersebut dengan teman kelompok dan gurumu!

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, kita tetapkan pengertian limit fungsi, sebagai berikut.



Definisi 10.1

Misalkan f sebuah fungsi $f: R \rightarrow R$ dan misalkan L dan c bilangan real.

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c .

Catatan:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L .

Kita menyatakan bahwa f mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Seperti yang telah dijelaskan di awal bab ini, sebuah pengamatan pada permasalahan akan melahirkan pengertian dan konsep umum. Tetapi ada baiknya kita harus menguji kembali konsep tersebut. Mari kita amati kembali konsep limit fungsi tersebut dengan mengambil strategi numerik, dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukanlah titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Hitung nilai $f(x)$ untuk setiap nilai x yang diberikan?
3. Kemudian amatilah nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.
4. Ada atau tidakkah suatu nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati c tersebut?



Contoh 10.1

Misalkan fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita menentukan x mendekati 2, kemudian kita tentukan nilai y oleh fungsi $y = f(x)$ pada tabel berikut. Kemudian amatilah tabel berikut.

Tabel 10.3 Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2

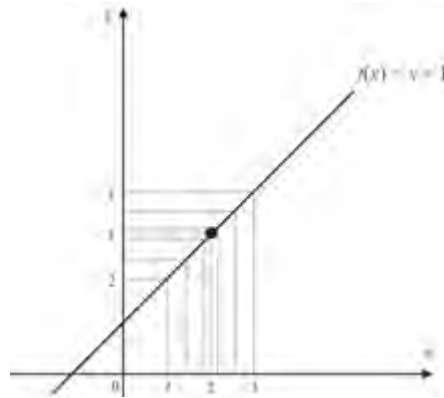
x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	...	?	...	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

Apakah pengamatanmu? Perhatikanlah tabel tersebut. Kita dapat memberikan beberapa pengamatan sebagai berikut.

- ◆ Ada banyak bilangan real yang dapat ditentukan yang mendekati 2.
- ◆ Setiap titik x mempunyai peta di y oleh fungsi yang diberikan.
- ◆ Setiap peta x juga mendekati peta 2.
- ◆ Tampak bahwa pendekatan ada dari kiri dan kanan tabel.

Menurut kamu, apa yang terjadi jika y hanya mendekati dari sebelah kiri atau kanan saja? Apakah ada fungsi yang demikian

Perhatikan sketsa berikut:



Gambar 10.7 Grafik Fungsi $f(x) = x + 1$

Secara matematika, fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

Bagaimanakah jika $f(x)$ tidak terdefinisi pada titik $x + 1$? Perhatikan contoh berikut ini!

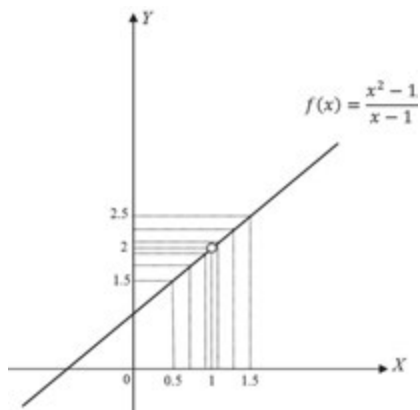
Contoh 10.2

Jika fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \in R, x \neq 1$. Misal $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$. Nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x yang mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.4 Nilai fungsi $y = f(x)$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan nilai tabel di atas, dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Gambar 10.8 Grafik fungsi $f(x)$



Diskusi

Perhatikanlah gambar di samping!

Coba diskusikan kembali dengan temanmu, apa maksud dari gambar bulatan kosong pada kurva fungsi pada saat $x = 1$?

Secara matematika, fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ dengan $x \neq 1$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dituliskan sebagai berikut.

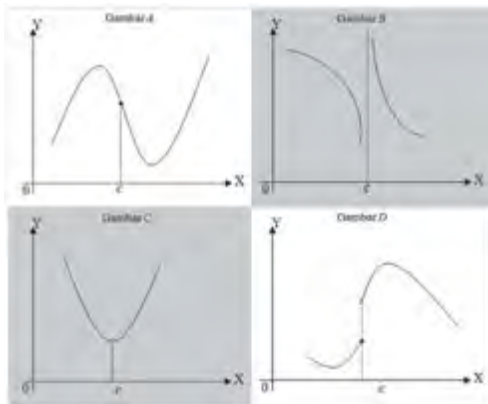
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



Diskusi

Coba kamu diskusikan kasus berikut!

Ajaklah temanmu memperhatikan dan mengamati beberapa gambar berikut! Gambar manakah yang menunjukkan bentuk fungsi yang mempunyai limit pada saat x mendekati c ? Jelaskanlah jawabanmu?



Gambar 10.9 Grafik fungsi $f(x)$ terkait limit

Contoh 10.3

Perhatikan fungsi berikut:

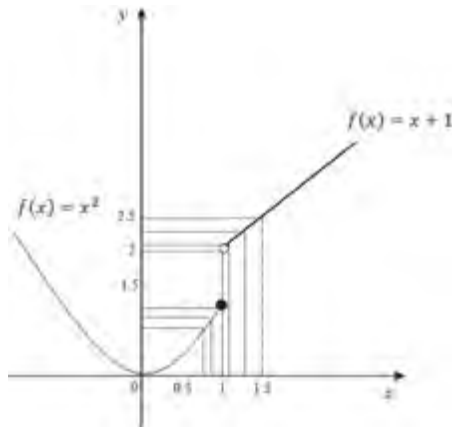
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x+1 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

Jika $y = f(x)$ maka nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.5 Nilai fungsi $y = f(x)$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan tabel di atas, $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Hal ini mengakibatkan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Gambar 10.10 Grafik fungsi $f(x)$

Dengan demikian fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x+1 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$ tidak memiliki limit di titik $x = 1$.

- Menurut kamu, mengapa fungsi di atas tidak memiliki limit di $x = 1$? Dapatkah kamu berikan contoh lain untuk fungsi yang tidak memiliki limit di titik tertentu?

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Perhatikan kembali beberapa contoh berikut. Kita akan mencoba mengamati sifat-sifat limit fungsi pada beberapa contoh dan tabel nilai-nilainya.



Contoh 10.4

Jika $f(x) = 2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai-nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.6 Nilai pendekatan $f(x) = 2$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	2	2	2	2	2	2	...	?	...	2	2	2	2	2	2

Apa yang kamu peroleh dari Tabel 10.6?

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat kita tuliskan secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 \dots\dots\dots(1)$$



Contoh 10.5

Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.7 Nilai pendekatan $f(x) = x$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut. Perhatikanlah, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 1 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat ditulis secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \dots\dots\dots(2)$$

- Dapatkah kamu menunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar? Berdasarkan (1) dan (2) secara induktif diperoleh sifat berikut.

Sifat-1

Misalkan f suatu fungsi dengan $f: R \rightarrow R$ dan L, c bilangan real.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Contoh 10.6

Jika $f(x) = x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.8 Nilai pendekatan $f(x) = x^2$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,04	0,25	0,81	0,98	0,99	...	?	...	2,00	2,02	1,21	2,25	3,23	4

Nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 adalah 1.

Berdasarkan Tabel 10.8, $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^2 &= \lim_{x \rightarrow 1} x \times x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} x \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Contoh 10.7

Jika $f(x) = 2x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.9 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,08	0,5	1,62	1,96	1,99	...	?	...	2,00	2,04	2,42	2	2	2

Berdasarkan Tabel 10.9, $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 &= \lim_{x \rightarrow 1} 2 \times x \times x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2 \times \lim_{x \rightarrow 1} x \times \lim_{x \rightarrow 1} x \\ &= 2 \times 1 \times 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Contoh 10.8

1. Jika $f(x) = 2x^2 + 2x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.10 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 + 2x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	1,5	3,42	3,94	3,98	...	?	...	4,00	4,06	4,62	7,5	12,0

Berdasarkan Contoh 10.7 dan Tabel 10.8 diperoleh $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x \\ &= 2 + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Contoh 10.9

Jika $f(x) = \frac{2}{2x^2 - x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.11 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{2}{2x^2 - x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	-25	7,14	2,78	0,26	2,01	...	?	...	1,99	1,94	1,52	0,67	0,49

Berdasarkan tabel di atas, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{2x^2 - x} = 2$ atau

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{2x^2 - x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x} \\ &= \frac{2}{2 - 1} = 2\end{aligned}$$

Perhatikanlah sifat-sifat limit fungsi berikut:

Sifat-2

Misalkan f dan g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$
4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] + \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] - \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
6. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \times \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
7. $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]}{\left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]}$ dengan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
9. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh 10.10

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu, $f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$ (cm)². Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah ...

Penyelesaian

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 10.12 Nilai pendekatan pada saat t mendekati 5

t	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\Delta f / \Delta t$
1	-4	-8	2
2	-3	-6,75	2,25
3	-2	-5	2,5
4	-1	-2,75	2,75
4,5	-0,5	1,4375	2,875
4,9	-0,1	-0,2975	2,975
4,99	-0,01	-0,029975	2,9975
4,999	-0,001	-0,00299975	2,99975
4,9999	-0,0001	-0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,253,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm²/menit).

Alternatif Penyelesaian lainnya

$$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$$

$$f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{(0,25t^2 + 0,5t) - f(5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,25t^2 + 0,5t - 8,75}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t^2 + t - 17,5)}{t - 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t + 3,5)(t - 5)}{t - 5} \\
&= \lim_{t \rightarrow 5} 0,5(0,5t + 3,5) \\
&= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5) \\
&= 3
\end{aligned}$$

- Jika t diganti menjadi $t - 5$, maka dapatkah kamu menunjukkan kembali proses limit di atas?

3. Menentukan Nilai Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan limit secara numerik, memfaktorkan, dan perkalian sekawan. Coba kita pelajari permasalahan yang dihadapi oleh grup diskusi berikut.

Lina dan Wati adalah teman satu kelompok belajar di kelasnya. Suatu hari mereka mendapat tugas dari guru untuk menggambar beberapa grafik fungsi dengan mencari sebanyak mungkin titik-titik yang dilalui fungsi tersebut. Pada saat mereka menentukan beberapa nilai di daerah asalnya, mereka mendapatkan kesulitan untuk menentukan nilai di daerah hasilnya, sebagai berikut:

1. Untuk $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = -1$ karena jika disubstitusi nilai 1 atau -1 ke fungsi, nilai $f(1) = \frac{0}{0}$ dan $f(-1) = \frac{0}{0}$.
2. Untuk $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 0$ karena jika nilai 0 disubstitusi juga ke fungsi maka mereka memperoleh $f(0) = \infty - \infty$.

Menurut kamu, apakah penyebab permasalahan mereka?

Jika kita pelajari lebih teliti, Lina dan Wati sedang menghadapi permasalahan bentuk tak tentu suatu limit. Coba kita tampilkan kembali sifat suatu limit. Misalkan f suatu fungsi dengan $f: R \rightarrow R$ dan L, c bilangan real, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Nilai L yang kita maksud adalah bentuk tentu limit. Jadi, jika kita substitusikan nilai c ke fungsi $f(x)$ sehingga $f(c)$ adalah bentuk-bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^∞ , dan lain-lain maka bentuk tersebut gagal menjadi nilai limit fungsi tersebut. Oleh karena itu, misi kita dalam limit fungsi adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi, dengan pengamatan berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi sehingga diperoleh $f(c) = L$.
2. Jika L merupakan salah satu bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih strategi: mencari beberapa titik pendekatan (numerik), memfaktorkan, perkalian sekawan, dll.

Ingat: $\sqrt{x} - a$ sekawan dengan $\sqrt{x} + a$,

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Contoh 10.11

Tentukanlah nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Cara I (Numerik)

Jika $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.13 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	...	?	...	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Dengan melihat tabel di atas, jika x mendekati 2, maka $y = f(x)$ akan mendekati 0,25.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \text{ karena } x \neq 2 \end{aligned}$$

Dapatkan anda meneliti untuk mendapatkan metode yang lain untuk menyelesaikan permasalahan limit fungsi tersebut.

$$= \frac{1}{4}$$

$$= 0,25$$

Contoh 10.12

Tentukanlah nilai $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.14 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ pada saat x mendekati -2

x	-2,3	-2,3	-2,1	-2,01	-2,001	...	-2	...	-1,999	-1,99	-1,9	-1,8	-1,7
y	2,594	-2,530	-2,501	-2,499	-2,5	...	?	...	-2,5	-2,501	-2,528	2,599	-2,763

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati -2 maka $y = f(x)$ akan mendekati $-2,5$

Cara II (Perkalian sekawan)

Perhatikan bahwa $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ dapat kita ubah dengan mengalikan

bentuk sekawan dari $(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5})$ sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + x - 1) - (2x + 5)}{(x + 2)(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{(x + 2)(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{2x+5})} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)}{(\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{2x+5})} \quad \text{karena } x \neq -2 \\
&= -\frac{5}{2} \\
&= -2,5
\end{aligned}$$

Contoh 10.13

Tentukanlah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dan $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$.

Jika $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, maka $f(1) = \frac{0}{0}$, $f(-1) = \frac{0}{0}$. Karena kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut pada saat x mendekati 1 dan -1 .

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 1 dan -1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.15 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	...	?	...	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 10.16 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati -1

x	-1,3	-1,2	-1,1	-1,01	-1,001	...	-1	...	-0,999	-0,99	-0,9	-0,8	-0,7
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	...	?	...	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2 dan jika nilai x mendekati -1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$ sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \quad (\text{Karena } x \neq 1 \text{ dan } x + 1 \neq 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 1^2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \quad (\text{Karena } x \neq 1 \text{ dan } x + 1 \neq 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (-1)^2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$



Contoh 10.14

Tentukanlah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 0 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.17 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ pada saat x mendekati 0

x	-0,3	-0,2	-0,1	-0,01	-0,001	...	0	...	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3
y	-0,08	-0,08	-0,07	-0,07	-0,06	...	?	...	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05	-0,04

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x semakin mendekati 0 maka $y = f(x)$ akan semakin mendekati $-0,06$.

Cara II (Faktorisasi)

Fungsi $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+4}}{x} \right) \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+4}}{x} \right) \quad (\text{Sifat-10.2}) \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+4}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x+4}} \right) \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x+4}} \right) \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x+4}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{-1}{4} \right) \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$



Uji Kompetensi 10.1

Pilihlah strategi pendekatan atau numerik untuk menentukan limit fungsi pada soal no. 1 sampai no. 5. Kemudian kamu pilih strategi lain dan membandingkan jawaban kamu dengan jawaban kamu pada strategi sebelumnya.

- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2} = \dots$$

A. -2 D. 1
B. -1 E. 2
C. 0
- $$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} = \dots$$

A. -2 D. 1
B. -1 E. 2
C. 0
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) = \dots$$

A. -2 D. 2
B. $-\frac{1}{8}$ E. $\frac{1}{8}$
C. 0
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \dots$$

A. -2 D. 1
B. -1 E. 2
C. 0

- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x + 3} - 2} = \dots$$

A. -2 D. 2
B. $-\frac{1}{8}$ E. $\frac{1}{8}$
C. 0

Selesaikanlah permasalahan berikut.

- Sketsalah dan analisislah limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{jika } x > 1 \\ 2x + 1 & \text{jika } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{x+1} & \text{jika } x < -1 \end{cases}$$

- Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.
 - Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!
 - Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!
 - Sketsalah permasalahan tersebut!
- Tentukan limit fungsi berikut dengan menggunakan dua atau lebih metode penyelesaian! Bandingkan jawaban yang anda peroleh!

a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$$

b. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{h}$$

c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-4h) - f(x+2h)}{3h}$$

9. Tentukanlah nilai limit fungsi

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4}}$$
 dengan menggu-

nakan numerik dan perkalian sekawan pada saat x mendekati 2.

10. Jika fungsi $f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x$

$$\text{maka } \lim_{x \rightarrow 2013} \left(\frac{3f(x)}{x - 2013} \right)$$



Projek

Himpun informasi penerapan limit fungsi dalam bidang teknik, masalah nyata, fisika, dan teknologi informasi. Rancanglah minimal dua masalah terkait informasi yang kamu peroleh dan buatlah pemecahannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu, dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c , sangat bergantung pada kedudukan titik c dan daerah asal fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi daerah asal fungsi adalah himpunan bilangan real di mana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi f mempunyai limit di titik c , apabila limit kiri sama dengan limit kanan fungsi di titik c .
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c . Titik c tidak harus anggota daerah asal fungsi, tetapi c bilangan real.

- 5 Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

6. Misalkan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c , dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

a. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

b. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

c. $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$

d. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] + \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$

e. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] - \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$

f. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \times \left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$

g. $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]}{\left[\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]}$ dengan $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

h. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$

i. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ bilamana n genap

7. Selanjutnya kita akan membahas tentang materi statistika. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan, dan pengukuran. Hal ini sangat berguna dalam penentuan nilai rata-rata, median, modus, kuartil, standar deviasi, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, kamu harus menguasai tentang fungsi, limit fungsi, dan fungsi yang kontinu sebagai prasyarat untuk mempelajari statistik. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

Bab 11

Statistika

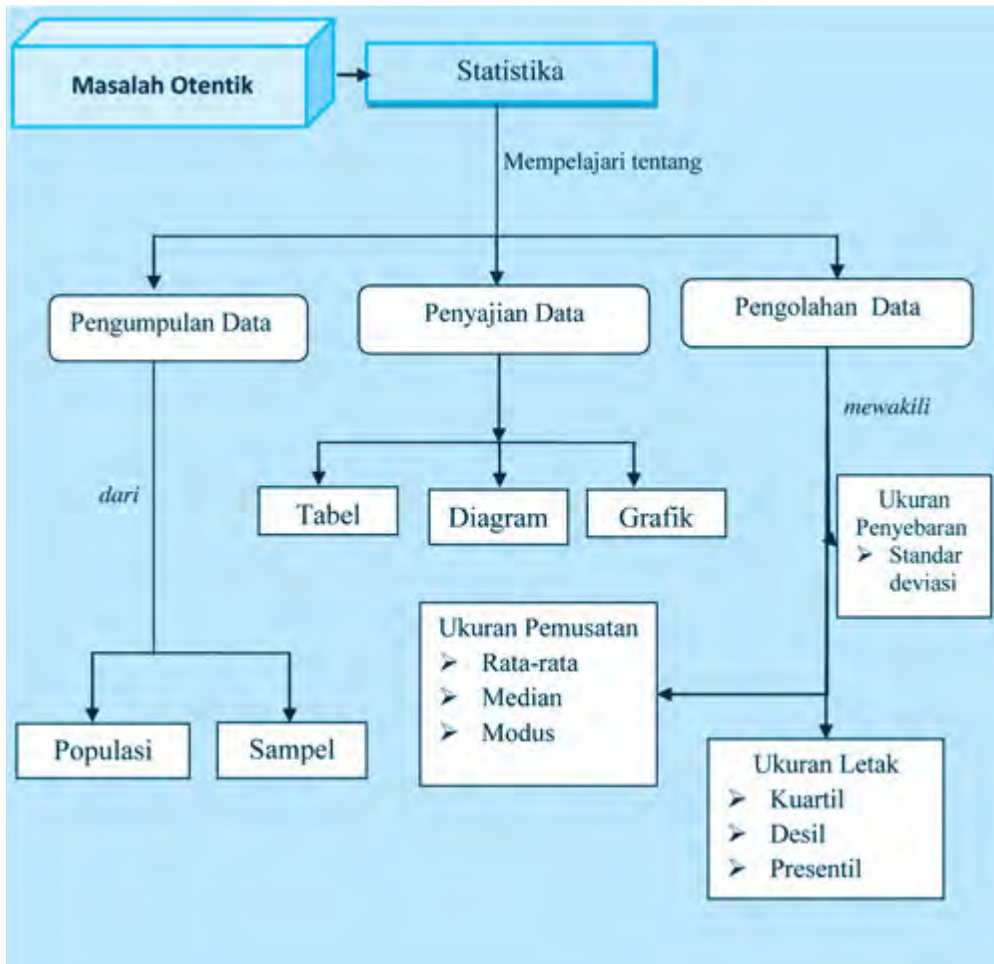
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Melalui proses pembelajaran statistika, siswa mampu</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten, dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis;3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal, dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari;4. memahami berbagai penyajian data dalam bentuk tabel atau diagram/plot yang sesuai untuk mengkomunikasikan informasi dari suatu kumpulan data melalui analisis perbandingan berbagai variasi penyajian data;5. menyajikan data nyata dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan.	<p>Melalui pembelajaran materi statistika, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• melatih berpikir kritis dan kreatif;• mengamati keteraturan data;• berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah;• berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka;• mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Mean (rata-rata)*
- *Ukuran Pemusatan*
- *Ukuran Letak*
- *Median*
- *Modus*
- *Kuartil*
- *Desil*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Data Tunggal

Pada subbab ini, akan dipelajari data-data yang muncul dalam kehidupan sehari-hari. Data merupakan hal yang sangat diperlukan untuk memberikan keterangan atau informasi yang diperoleh dari suatu pengamatan. Data dapat berupa angka, lambang, ataupun karakteristik. Data yang diperoleh sebaiknya merupakan data yang sifatnya merupakan perwakilan dari kejadian. Selain itu data juga harus objektif sesuai dengan kenyataan dan memiliki hubungan terhadap permasalahan/kejadian yang akan diselesaikan. Secara umum, dari suatu data dapat digali informasi-informasi penting sebagai pertimbangan seseorang untuk mengambil keputusan yang akan dilakukannya; misalnya, para pimpinan instansi atau pihak yang berkepentingan. Perhatikan masalah tingkat produksi pertahun beberapa UKM di Yogyakarta, tahun 2012.



Masalah-11.1

Data Tingkat Produksi Barang UKM di Yogyakarta

Sebuah lembaga survey menemukan bahwa terdapat 10 Usaha Kecil Menengah (UKM) yang tersebar di propinsi D.I. Yogyakarta yang memproduksi berbagai produk, seperti: kerajinan tangan, makanan kering, dan aksesoris. Lembaga survei tersebut memperoleh data produksi sepuluh UKM untuk tahun 2012 yakni sebagai berikut (dalam satuan Unit).

Tabel 11.1 Data Jumlah Produksi Barang UKM di Yogyakarta

UKM	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Jumlah Produksi (unit)	400	550	600	700	350	450	650	600	750	600

Berdasarkan data pada Tabel 11.1, lembaga survei ini memberikan data statistik kepada pemerintah (khususnya menteri keuangan dan perdagangan) untuk merespon keadaan UKM di Yogyakarta. Bagaimana harus menyusun informasi mengenai data tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan pengolahan data tersebut, terlebih dahulu disajikan dalam tampilan yang lebih menarik.

a. Penyajian Data Tabel

Sebenarnya data yang diperoleh lembaga survei pada Tabel 11.1 sudah dalam bentuk tabel, tetapi mari kita sajikan dalam tampilan yang lebih menarik lagi, seperti Tabel 11.2 berikut ini.

Tabel 11.2 Data Jumlah Produksi Barang UKM di Yogyakarta

UKM	Jumlah Produksi (dalam satuan unit)
A	400
B	550
C	600
D	700
E	350
F	450
G	650
H	600
I	750
J	600
Total	5.650

Kemudian, lembaga tersebut ingin menyampaikan informasi tentang rata-rata tingkat produksi produk UKM di Yogyakarta, untuk dapat dibandingkan dengan tingkat produksi UKM di provinsi lain. Untuk data tunggal, rata-rata (*mean*) dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Mean}(\bar{x}) = \frac{\text{datum ke-1} + \text{datum ke-2} + \text{datum ke-3} + \dots + \text{datum ke-}n}{\text{banyak datum}}$$

Untuk data di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{400 + 550 + 600 + 700 + 350 + 450 + 650 + 600 + 750 + 600}{10} \\ \bar{x} &= \frac{5.650}{10} = 565\end{aligned}$$

Artinya, rata-rata tingkat produksi setiap UKM di Yogyakarta pada tahun 2012 adalah 565 unit.

Selain rata-rata data tersebut, terdapat tiga UKM yang memiliki jumlah produksi yang sama, sebesar 600 unit. Dalam arti statistik, dari 10 data yang tersaji, terdapat datum yang paling sering muncul, yaitu 600.



Definisi 11.1

Datum yang paling sering muncul disebut modus.

Jadi, modus data dari Tabel 11.1 adalah 600.

Jika data terendah diurutkan sampai data tertinggi, diperoleh urutan data Tabel 11.1 sebagai berikut.

350, 400, 450, 550, 600, 600, 600, 650, 700, 750

Jika data tertinggi dikurang dengan data terendah diperoleh:

$$\begin{aligned}\text{Datum tertinggi} - \text{datum terendah} &= 750 - 350 \\ &= 400.\end{aligned}$$

Hasil pengurangan ini dalam statistik disebut dengan jangkauan data (*range*). Pada data di atas, diperoleh jangkauannya 400.

Sifat-1

$$\text{Jangkauan Data} = \text{Datum tertinggi} - \text{Datum terendah} = x_{maks} - x_{min}$$

Dari urutan data tersebut diperoleh nilai tengah data (*median*). Nilai tengah data (*median*) adalah statistik yang membagi dua data pada bagian yang sama.

350	400	450	550	600	600	600	650	700	750
Bagian-1					Bagian-2				

$$\text{Jadi median data} = \frac{600 + 600}{2} = 600.$$

Secara umum, formula untuk menentukan median, dirumuskan sebagai berikut:

- Jika banyak data genap, median dirumuskan:

Catatan:
Ingat definisi datum sewaktu kamu di SMP!

Sifat-2

$$\text{Median} = \frac{\text{Datum ke } \left(\frac{n}{2}\right) + \text{Datum ke } \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2}, n : \text{banyak data}$$

- Jika banyak data ganjil, median dirumuskan:

Sifat-3

$$\text{Median} = \text{Datum nilai ke } \left(\frac{n+1}{2}\right), n : \text{banyak data, } n : \text{genap}$$

Selanjutnya, lembaga survei tersebut ingin menyajikan data tersebut dalam empat bagian utama. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut Kuartil.

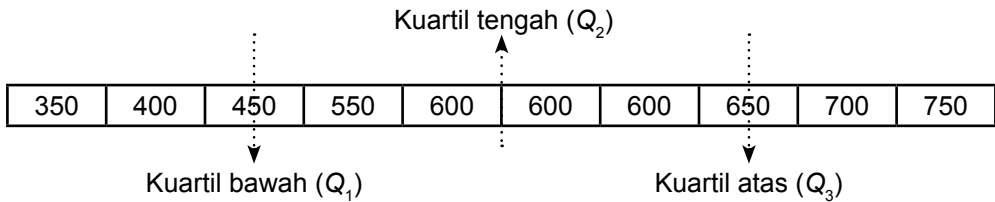
Misalkan terdapat data $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dengan $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$.

Kuartil satu (Q_1) atau kuartil bawah, kuartil dua (Q_2) atau kuartil tengah dan kuartil tiga (Q_3) atau kuartil atas, merupakan statistik yang membagi data menjadi empat bagian yang sama. Letak tiap kuartil didefinisikan sebagai berikut.

Sifat-4

$$\text{Letak } Q_i = \text{Datum ke-} \left(\frac{i(n+1)}{4} \right), n : \text{banyak data}$$

Letak Q_i tidak selalu pada posisi datum ke- i , mungkin juga terletak di antara dua datum. Untuk keadaan seperti ini, digunakan pola pendekatan atau interpolasi. Melihat kembali data di atas, kita akan menentukan statistik yang membagi data menjadi empat bagian.



$$\text{Letak } Q_1 = \text{Datum ke } \frac{1 \cdot (10+1)}{4} = \text{Datum ke } 2\frac{3}{4}$$

Artinya Q_1 terletak di antara datum ke-2 (x_2) dan datum ke-3 (x_3). Dengan pendekatan datum interpolasi berikut.

$$Q_1 = x_2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_2) \Leftrightarrow Q_1 = 400 + \frac{3}{4}(450 - 400) = 437,5$$

$$\text{Letak } Q_2 = \text{Datum ke } \frac{2(10+1)}{4} = \text{Datum ke } 5\frac{1}{2}$$

Analog dengan Q_1 , Q_2 ditentukan melalui pendekatan datum interpolasi berikut.

$$Q_2 = x_5 + \frac{1}{2}(x_6 - x_5) \Leftrightarrow Q_2 = 600 + \frac{1}{2}(600 - 600) = 600$$

Sebagai catatan nilai $Q_2 = \text{Median}$.

$$\text{Letak } Q_3 = \text{Datum ke } \frac{3(10+1)}{4} = \text{Datum ke } 8\frac{1}{4}$$

Analog juga dengan Q_1 dan Q_2 , nilai statistik Q_3 dihitung melalui pendekatan datum interpolasi.

$$Q_3 = x_8 + \frac{1}{4}(x_9 - x_8) \Leftrightarrow Q_2 = 650 + \frac{1}{4}(700 - 650) = 662,5.$$

Kembali ke persoalan kita di atas.

Dengan adanya nilai Q_1 , Q_2 dan Q_3 , lembaga survei tersebut ingin menyajikan statistik lima serangkai, yaitu statistik yang terdiri dari: datum minimum, datum maksimum, Q_1 , Q_2 , dan Q_3 .

Susunan statistik lima serangkai ini, seperti berikut ini.

Q_2	
Q_1	Q_3
x_{min}	x_{max}

Untuk data di atas, statistik lima serangkainya adalah:

$Q_2 = 600$	
$Q_1 = 437,5$	$Q_3 = 662,5$
$x_{min} = 350$	$x_{max} = 750$

Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4 , sebab kuartil Q_1 , Q_2 dan Q_3 membagi data menjadi empat kelompok yang sama. Jika banyak data ≥ 10 , maka data dibagi menjadi 10 kelompok yang sama, dengan tiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*. Tentu saja terdapat 9 *desil*, yaitu D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 , D_6 , D_7 , D_8 , dan D_9 .

Cara menentukan D_i pada suatu data tunggal, hampir sama dengan menentukan kuartil D_i pada data tunggal. Letak setiap D_i didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 11.2

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dengan $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$.
Desil ke- i untuk data tunggal adalah:

$$D_i = \text{Datum ke } \frac{i \cdot (N + 1)}{10}$$

Letak D_i tidak selalu pada posisi datum ke- i , mungkin juga terletak di antara dua datum. Untuk keadaan seperti ini, kita menggunakan pola pendekatan atau interpolasi.

Dalam kajian persoalan kita di atas, kita dapat menentukan $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8,$ dan D_9 .

Tentukan D_3 dan D_7 .

Perhatikan kembali data di atas.

350	400	450	550	600	600	600	650	700	750
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Langkah awalnya, kita tentukan letak D_3 .

$$\text{Letak } D_3 = \text{datum ke } \frac{3(10+1)}{10} = \text{datum ke } 3\frac{3}{10}.$$

$$\circ D_3 = x_3 + \frac{1}{10}(x_4 - x_3) = 450 + \frac{1}{10}(550 - 450) = 460.$$

$$\text{Letak } D_7 = \text{datum ke } \frac{7(10+1)}{10} = \text{datum ke } 7\frac{7}{10}.$$

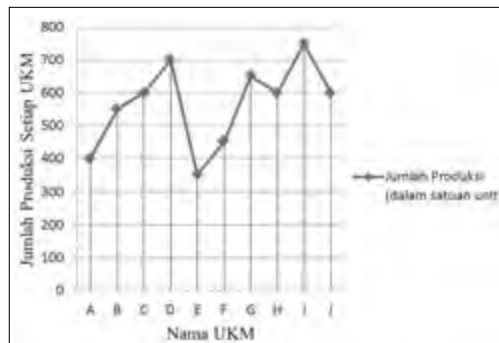
$$\circ D_7 = x_7 + \frac{1}{10}(x_8 - x_7) = 600 + \frac{1}{10}(650 - 600) = 605.$$

Untuk ukuran statistik desil yang lain, silahkan kamu tentukan dan cek dengan hasil kerjaan teman sekelasmu yang lain.

b. Penyajian Data dalam Diagram Garis (Line Diagram)

Penyajian data dalam diagram garis berarti, menyajikan data statistik dengan menggunakan garis-garis lurus yang menghubungkan komponen-komponen pengamatan (waktu dan hasil pengamatan jumlah produksi). Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu kondisi yang berlangsung secara kontinu, misalnya data jumlah penduduk, perkembangan nilai tukar mata uang suatu negara, dan jumlah penjualan barang.

Untuk data jumlah Produksi UKM di Yogyakarta, jika dideskripsikan dalam diagram garis akan terbentuk sebagai berikut.



Gambar 11.1 Diagram garis jumlah produksi UKM di Yogyakarta

Tentunya, selain penyajian data tersebut, staf lembaga survei tersebut menyampaikan informasi bahwa,

- masih ada tiga UKM, yaitu UKM A, UKM E, dan UKM F hanya mampu menghasilkan produk UKM kurang dari 500 unit dalam tahun 2012,
- hanya satu UKM, yaitu UKM I yang mampu menghasilkan sebanyak 750 unit produk dalam tahun 2012.

Tolong bantu Staf tersebut untuk menyampaikan informasi penting mengenai jumlah produksi barang UKM di Yogyakarta, tahun 2012.

Selanjutnya, staf tersebut ingin menyampaikan data produksi UKM tersebut dalam tingkat persentase. Untuk itu diperlukan penyajian data dalam bentuk diagram lingkaran (*pie chart*).

c. Diagram Lingkaran (*Pie Chart*)

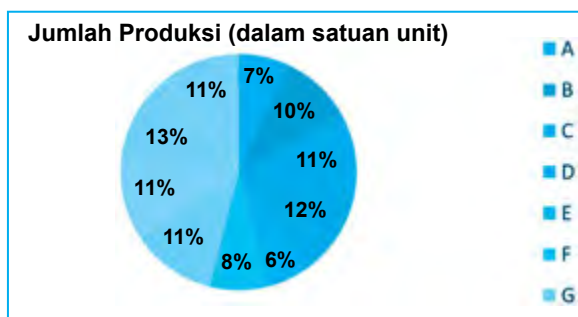
Melalui diagram ini, akan ditunjukkan besar persentase tingkat produksi tiap UKM. Total produk yang dihasilkan kesepuluh UKM tersebut adalah sebesar 5650 unit. Oleh karena itu, tingkat persentase produksi setiap UKM, didefinisikan sebagai berikut.



Definisi 11.3

$$\% \text{ produksi UKM X} = \frac{\text{Jumlah Produksi UKM X}}{\text{Total Produksi Semua UKM}} \cdot 100\%$$

Secara lengkap, persentase produksi setiap UKM, disajikan pada diagram berikut ini.



Gambar 11.2 Persentase tingkat produksi kesepuluh UKM

Setelah diagram lingkaran terbentuk, lembaga survei ingin merangkumkan informasi menarik dari data tersebut. Bantulah staf tersebut untuk memberikan informasi menarik dari diagram lingkaran di atas!

Selain ketiga penyajian data di atas, masih ada cara penyajian data yang lain. Misalnya dengan diagram batang (chart), dan diagram daun. Silahkan diskusikan dengan teman sekelasmu tentang penyajian data tersebut dengan diagram batang dan diagram daun.

Rata-Rata Gaji Buruh

Gaji buruh menjadi topik perbincangan di kalangan buruh dan kalangan pengusaha. Pada tahun 2012, menteri terkait dengan masalah ini merilis gaji buruh di 8 kota besar di negara tersebut sebagai berikut (dalam ratusan ribu rupiah)

Nama Kota	Besar Gaji
A	25
B	18
C	22
D	20
E	17
F	19
G	22
H	22,5

Berdasarkan data tersebut, menteri bermaksud menerapkan kenaikan gaji buruh bersifat situasional, yang disesuaikan dengan kondisi perkembangan perusahaan yang ada di kota tersebut. Hasil pembahasan dengan para pengusaha dari kelima kota tersebut adalah rumusan kenaikan gaji buruh dengan sistem subsidi silang.

Buruh yang memiliki gaji kurang atau sama dengan Rp 2.000.000 diberi kenaikan gaji sebesar 12% dan buruh yang memiliki gaji lebih dari Rp 2.000.000 diberi kenaikan gaji sebesar 8%. Berapakah rata-rata gaji buruh setelah mengalami kenaikan gaji?

Tabel berikut ini menyajikan besar kenaikan gaji di setiap kota.

Tabel 11.4 Besar Gaji Buruh Sebelum dan Sesudah Kenaikan Gaji di 8 Kota

Nama Kota	Besar Gaji	% Kenaikan Gaji	Nominal Kenaikan Gaji	Gaji setelah Kenaikan
A	Rp2.500.000,00	8%	Rp 200.000,00	Rp 2.700.000,00
B	Rp1.800.000,00	12%	Rp 216.000,00	Rp 2.016.000,00
C	Rp2.200.000,00	8%	Rp 176.000,00	Rp 2.376.000,00

Nama Kota	Besar Gaji	% Kenaikan Gaji	Nominal Kenaikan Gaji	Gaji setelah Kenaikan
D	Rp2.000.000,00	12%	Rp 240.000,00	Rp 2.240.000,00
E	Rp1.700.000,00	12%	Rp 204.000,00	Rp 1.904.000,00
F	Rp1.900.000,00	12%	Rp 228.000,00	Rp 2.128.000,00
G	Rp2.200.000,00	8%	Rp 176.000,00	Rp 2.376.000,00
H	Rp2.250.000,00	8%	Rp 180.000,00	Rp 2.430.000,00
Total	Rp16.550.000,00		Rp1.620.000,00	Rp18.170.000,00

Pada Tabel 11.4, memaparkan besar kenaikan gaji dan besar gaji yang diterima buruh setelah memperoleh persentasi kenaikan gaji.

Rata-rata gabungan gaji buruh yang baru dapat dihitung melalui rumus berikut.

$$\bar{x}_{Gab} = \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B + \bar{x}_C + \bar{x}_D + \bar{x}_E + \bar{x}_F + \bar{x}_G + \bar{x}_H}{8} = \frac{18.170.000}{8} = 2.271.250$$

Jadi, rata-rata besar gaji buruh setelah mendapat % kenaikan gaji adalah Rp2.271.250,00.

Selain rata-rata besar gaji buruh tersebut, dari tabel tersebut juga bisa kita tentukan rata-rata besar kenaikan gaji dan besar rata-rata gaji sebelum mendapat kenaikan.

Dengan menggunakan rata-rata kenaikan dan rata-rata gaji buruh sebelum kenaikan gaji, dapatkah kamu menentukan rata-rata besar gaji buruh setelah mendapat kenaikan gaji?



Masalah-11.2

Data Berpola Aritmetika

Sewaktu Pak Suprpto memiliki usaha “Toko Serba Ada”, beliau mampu menikmati hobinya sebagai kolektor barang-barang antik. Pada tahun 2011, data koleksi barang-barang tersebut memenuhi pola aritmetika berikut.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, a_{11}, a_{12}.$$

Sejak akhir tahun 2011, Pak Suprpto berhasil mengembangkan usaha tersebut menjadi supermarket. Kondisi ini juga berimbas terhadap kegemarannya, sedemikian sehingga barang-barang koleksi tersebut mengikuti pola:

$$a_1 + t, a_2 + t, a_3 + t, \dots, a_{10} + t, a_{11} + t, a_{12} + t.$$

Selidikilah perubahan rata-rata dan median data di atas.

Alternatif Penyelesaian

Data tahun 2011, diketahui bahwa:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ memiliki pola aritmetika. Artinya bahwa beda dua suku yang berurutan sama.

$$\bar{X}_{2011} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} + a_{11} + a_{12}}{12} = \frac{6(a_1 + 11b)}{12} = \frac{1}{2}(a_1 + 22b)$$

Karena $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ telah tersusun dari yang terkecil hingga yang tertinggi, maka median data tersebut adalah:

$$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-6} + \text{Data ke-7}}{2} = \frac{a_6 + a_7}{2} = \frac{1}{2}(2a_1 + 11b)$$

Selanjutnya mari kita perhatikan pola data tahun 2012.

$(a_1 + t), (a_2 + t), (a_3 + t), \dots, (a_{10} + t), (a_{11} + t), (a_{12} + t)$

$$\bar{X}_{2012} = \frac{(a_1 + t) + (a_2 + t) + (a_3 + t) + \dots + (a_{10} + t) + (a_{11} + t) + (a_{12} + t)}{12} = \frac{6(a_1 + 11b) + 12t}{12}$$

$$\bar{X}_{2012} = \frac{1}{2}(a_1 + 11b) + t.$$

Median data baru ditentukan:

$$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-6} + \text{Data ke-7}}{2} = \frac{(a_6 + t) + (a_7 + t)}{2} = \frac{a_6 + a_7 + 2t}{2} = \frac{1}{2}(2a_1 + 11b) + t.$$

Perhatikan, bahwa pertambahan setiap nilai data sebesar t , mengakibatkan pertambahan rata-rata dan median data baru sebesar t . Sebagai kesimpulan dari data di atas adalah bahwa data yang berpola aritmetika memiliki nilai statistik rata-rata sama dengan nilai median. Meskipun ada perubahan pada data lama, selama perubahan data tersebut tetap mengikuti pola aritmatika, nilai kedua statistik juga tetap sama.

Latihan 11.1

Terdapat beberapa kemungkinan terhadap perubahan nilai data, di antaranya setiap nilai data mungkin akan berkurang sebesar q atau akan dikali sebesar p . Bagaimana perubahan nilai ukuran pusat data tersebut?



Masalah-11.3

Deviasi Rata-Rata

Diketahui $x_1 = 3,5$, $x_2 = 5,0$, $x_3 = 6,0$, $x_4 = 7,5$, dan $x_5 = 8,0$. Jika deviasi rata-rata nilai tersebut dinyatakan dengan rumus $\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i - \bar{x}}{n} \right|$. Tentukanlah deviasi rata-rata data yang diketahui pada Masalah-11.2.

Alternatif Penyelesaian

Deviasi rata-rata merupakan ukuran statistik yang dapat digunakan untuk melihat variasi data. Dalam konteks penelitian karya ilmiah yang menyangkut statistika, nilai deviasi rata-rata mungkin menjadi nilai statistik yang penting.

Dalam soal di atas, sudah didefinisikan bahwa deviasi rata-rata adalah nilai mutlak setiap data terhadap rata-rata data. Oleh karena itu, kita perlukan rata-rata terlebih dahulu.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{20}{5} = 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Deviasi rata-rata} &= \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + |x_4 - \bar{x}| + |x_5 - \bar{x}|}{5} \\ &= \frac{|3,5 - 6| + |5 - 6| + |6 - 6| + |7,5 - 6| + |8 - 6|}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Deviasi rata-rata} = \frac{2,5 + 1 + 0 + 1,5 + 2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Jadi deviasi rata-rata data di atas adalah 1,4.



Uji Kompetensi 11.1

1. Data penjualan radio setiap bulan di suatu toko pada tahun 2002 adalah sebagai berikut: 20, 3, 9, 11, 4, 12, 1, 9, 9, 12, 8, 10. Tentukanlah median, kuartil bawah, dan kuartil atas data tersebut.
2. Tahun lalu gaji awal 5 orang pegawai baru (dalam ribuan rupiah) sebagai berikut. 480, 360, 650, 700, 260. Dengan bertambahnya harga barang-barang kebutuhan pokok, pihak perusahaan memberikan kebijakan untuk kenaikan gaji mereka. Pegawai dengan gaji kurang dari Rp 500.000 mendapat kenaikan gaji sebesar 15% dan bagi pegawai dengan gaji lebih dari Rp 500.000 mendapat kenaikan 10%. Tentukanlah besarnya kenaikan gaji mereka.
3. Hasil survei tentang *lifespan* (rata-rata lama hidup) manusia di suatu komunitas adalah 40 tahun (terdiri atas dokter dan jaksa). Jika *lifespan* dokter adalah 35 tahun dan *lifespan* jaksa adalah 50 tahun. Tentukanlah perbandingan banyaknya jumlah dokter dan banyaknya dalam komunitas tersebut.
4. Diberikan data tentang tinggi badan 20 siswa (dalam cm) sebagai berikut.
156 158 160 169 160
156 160 162 164 160
156 160 160 166 170
157 156 178 155 155

Deskripsikanlah data tersebut dalam bentuk diagram batang, kemudian tentukanlah ukuran pemusatnya.

5. Nilai ujian mata pelajaran Fisika diberikan dalam tabel berikut.

Nilai	5	6	7	8	9	10
Frekuensi	3	5	4	6	1	1

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian siswa tersebut di atas rata-rata. Tentukanlah.

- a. Persentasi siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.
 - b. Modus dan median data di atas.
6. Suatu data dengan rata-rata 16 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikali p kemudian ditambahkan $2q$, diperoleh data baru dengan jangkauan 9 dan rata-rata menjadi 30. Tentukanlah nilai $p + 3q$.
 7. Tabel berikut menunjukkan usia 20 orang naik di kota A , 2 tahun lalu. Jika pada tahun ini 3 orang yang berusia 7 tahun dan seorang yang berusia 8 tahun pindah ke luar kota A .

Usia	Frekuensi
5	3
6	5
7	8
8	4

Hitunglah usia rata-rata 16 orang yang masih tinggal di kota tersebut.

8. Misalkan suatu data $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dengan $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, yang memiliki \bar{x} , *modus*, *median*, *kuartil*, *jangkaun*. Jika semua nilai data dikali r , ukuran apakah yang mengalami perubahan?. Hitunglah perubahannya.
Bagaimana perubah terhadap data jika semua nilai data ditambah sebesar s , kemudian hitunglah perubahannya.
9. Di suatu komunitas pecinta koleksi prangko, berniat untuk membantu bencana alam Gunung Merapi, pada tahun 2010. Dari kota Lamongan, rata-rata sumbangan 25 pilatelis adalah sebesar Rp50.000,00 Setelah ditambahkan dengan sumbangan 15 pilatelis dari kota Sidoarjo, rata-rata kumulatif menjadi Rp65.000,00 Hitunglah sumbangan rata-rata ke-12 pilatelis dari Sidoarjo.
10. Seorang penggemar bola, mengidolakan 8 *striker* pemain bola terkenal, yaitu Cristiano Ronaldo, Leonil Messi, Carlos Teves, Roney, Fernando Torres, Podolski, Alexander Pato, dan Diego Milito. Pada tahun 2010, dia mencatat banyak gol yang dicetak mereka dalam satu pertandingan. Carlos Teves mampu mencetak $(x + 1)$ gol, dan $(2x + 1)$ gol oleh Alexander Pato. Sedangkan 6 *striker* lainnya mencetak gol sebanyak $(x + 2)$, $(x + 3)$, $(x + 4)$, $(x + 5)$, $(x + 6)$, $(x + 7)$. Jika rata-rata banyak gol yang dicetak oleh mereka adalah 7 gol. Tentukanlah banyak gol yang berhasil dicetak setiap *striker* pada satu pertandingan.



Projek

Himpunlah informasi berupa data statistik dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

2. Penyajian Data Kelompok



Masalah-11.4

Kepala Sekolah SMA Negeri Unggulan ingin meningkatkan prestasi hasil belajar siswa. Untuk itu perlu diadakan evaluasi untuk melihat statistik berupa *mean*, modus, median dan lainnya. Guru matematika telah memiliki data nilai ulangan siswa kelas 10. Dapatkah kamu membantu guru matematika untuk menemukan statistik data tersebut?

Data ulangan siswa semester diperoleh:

79 80 70 68 92 48 90 92 85 76 48 90 92 85 76 88 78 74 70 38
80 63 76 49 84 61 83 88 81 82 61 83 88 81 82 51 71 72 82 70
81 91 56 65 63 74 89 73 90 97 60 66 98 93 81 93 72 91 67 88
75 83 79 86

Alternatif Penyelesaian

1. Pengolahan Data

Data di atas masih belum berurutan, cobalah mengurutkan data dimulai dari data terkecil hingga data terbesar

38 48 49 51 56 60 60 61 63 63 63 65 66 67 67 68 70 70 70 71
71 72 72 72 73 74 74 75 75 76 76 78 79 79 80 80 80 81 81 81
82 82 83 83 84 85 86 87 88 88 88 89 90 90 90 91 91 91 92 93
93 93 97 98

dari data yang telah terurut di atas dapat diperoleh:

- Data terbesar = 98 dan
Data terkecil = 38
- Menentukan banyak kelas
Menurut Sturges, jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k , maka berlaku
 $k = 1 + 3,3 \log n$, sehingga,
banyaknya kelas = $1 + 3,3 \log 64$
 $= 1 + 3,3 (1,806)$
 $= 1 + 5,9598 \approx 7$
- Menentukan panjang interval kelas
panjang kelas = $\frac{\text{jangkauan}}{\text{banyak kelas}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{60}{7} \\
 &= 8,57 \approx 9
 \end{aligned}$$

Adakah cara yang lain yang kalian temukan dalam menentukan panjang kelas?

- Menentukan batas kelas interval
ambil data yang terurut di atas sembilan data
38 39 40 41 42 43 44 45 46, dapat ditulis
9

kelas I = 38 – 46

kelas II = 47 – 55

⋮

dst.

- Menentukan frekuensi
gunakanlah sistem turus (*tally*) untuk mencari frekuensi data

Tabel 11.4. Tabel frekuensi

Kelas	Turus (<i>Tally</i>)	Frekuensi
38 – 46		1
47 – 55		3
56 – 64	II	7
65 – 73		14
74 – 82	II	17
83 – 91	I	16
92 – 100		6
Total		64

- Menentukan titik tengah
Titik tengah diperoleh dari:

$$\text{Titik tengah} = \frac{1}{2}[\text{batas bawah} + \text{batas atas}]$$

dengan hasil pengolahan data di atas dapat disajikan tabel statistik sebagai berikut.

Tabel 11.5 Tabel Frekuensi

No	Kelas	Titik tengah	Frekuensi
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	3
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	14
5	74 – 82	78	17
6	83 – 91	87	16
7	92 – 100	96	6
Total			64

2. Nilai Statistik Data Berkelompok

- *Mean*

Terdapat dua cara untuk menghitung data berkelompok yaitu:

1. Menentukan Mean dengan Rumus Mean

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k}$$

dengan : f_i = frekuensi kelas ke- i

x_i = nilai tengah kelas ke- i

Langkah 1. Tentukan nilai tengah setiap kelas

Langkah 2. Hitung hasil kali frekuensi dengan nilai tengah (f_i, x_i) untuk setiap kelas

Langkah 3. Hitung mean dengan menggunakan rumus

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

dengan menggunakan langkah-langkah di atas diperoleh tabel frekuensi.

Tabel 11.6 Penghitungan Rata-rata (Mean)

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
1	38 – 46	42	1	42
2	47 – 55	51	3	153
3	56 – 64	60	7	420
4	65 – 73	69	14	966
5	74 – 82	78	17	1.326
6	83 – 91	87	16	1.392
7	92 – 100	96	6	576
Total			$\sum_{i=1}^k f_i = 64$	$\sum_{i=1}^k f_i \cdot x_i = 4.875$

$$\text{mean} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

$$\text{mean} = \frac{4.875}{64} = 76,17$$

2. Menentukan mean dengan rumus rata-rata sementara

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^k f_i d_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

dimana : f_i = frekuensi kelas ke- i

\bar{x}_s = Rata-rata sementara

- Langkah 1.* Ambil nilai tengah dengan frekuensi terbesar sebagai mean sementara x_s .
- Langkah 2.* Kurangkan setiap nilai tengah kelas dengan *mean* sementara dan catat hasilnya dalam kolom $d_i = x_i - x_s$.
- Langkah 3.* Hitung hasil kali $f_i d_i$ dan tuliskan hasilnya pada sebuah kolom, dan hitung totalnya.
- Langkah 4.* Hitung *mean* dengan menggunakan rumus rata-rata sementara.

Langkah-langkah di atas diselesaikan pada tabel berikut:

Tabel 11.7 Perhitungan Rataan sementara

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - x_s$ $x_s = 78$	$f_i \cdot d_i$
1	38 – 46	42	1	-36	-36
2	47 – 55	51	3	-27	-81
3	56 – 64	60	7	-18	-126
4	65 – 73	69	14	-9	-126

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - x_s$ $x_s = 78$	$f_i \cdot d_i$
5	74 – 82	78	17	0	0
6	83 – 91	87	16	9	144
7	92 – 100	96	6	18	108
Total			$\sum_{i=1}^k f_i = 64$		$\sum_{i=1}^k f_i d_i = -117$

diperoleh:

$$\text{Mean} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^k f_i d_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

$$\text{Mean} = 78 + \frac{-117}{64} = 76,17$$

- ◆ Dapatkan kamu membandingkan yang terbaik dari kedua cara di atas?
 - ◆ Dapatkan kamu memiliki cara yang lain dalam menentukan rata-rata (*mean*)?
- Modus
dengan menggunakan rumus modus:

$$M_o = t_b + k \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right]$$

dimana: M_o = modus; t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas
 d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya
 d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Tabel 11.8 Perhitungan Modus

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	3
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	14
5	74 – 82	78	17
6	83 – 91	87	16
7	92 – 100	96	6

$d_2 = 1 \left\{ \begin{array}{l} 14 \\ 17 \\ 16 \end{array} \right\} d_1 = 3$

dari data di atas dapat ditentukan sebagai berikut.

Tampak modus terletak pada kelas 74 – 82 dengan frekuensi $f = 17$ dan panjang kelas $k = 9$. Oleh karena itu $t_b = 73,5$, dan $d_1 = 1 - 14 = 3$ serta $d_2 = 17 - 16 = 1$, jadi, modus data di atas adalah:

$$\begin{aligned} M_o &= t_b + k \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] \\ &= 73,5 + 9 \left[\frac{3}{3 + 1} \right] \\ &= 73,5 + 6,75 \\ M_o &= 80,25 \end{aligned}$$

- ◆ Dengan menggunakan teknik histogram gambarlah serta tentukan modulusnya?
- Median
dengan menggunakan rumus median:

$$\text{Median} = t_b + k \left[\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \right]$$

dimana:

t_b = tepi bawah kelas median;

k = panjang kelas

N = banyak datum dari statistik terurut=

F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median

f_m = frekuensi kelas median

dari data sebelumnya diperoleh $k = 9$; $t_b = 73,5$; $N = 64$; $f_m = 17$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Median} &= t_b + k \left[\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \right] \\ &= 73,5 + 9 \left[\frac{\frac{64}{2} - 25}{17} \right] \end{aligned}$$

$$= 73,5 + 3,705$$

$$= 77,205$$

Apakah hubungan dari ketiga pemusatan data di atas? diskusikan dengan temanmu!



Uji Kompetensi 11.2

1. Data pada tabel di bawah ini tentang berat pada siswa 50 siswa.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
31 – 36	4
37 – 42	6
43 – 48	9
49 – 54	14
55 – 60	10
61 – 66	5
67 – 72	2

Tentukanlah mean, median, modul dan kuartil (Q_1 , Q_2 , dan Q_3) dari data di atas.

2. Hasil observasi tentang berapa kali 18 siswi berhias dalam 1 hari sebagai berikut.

3	3	5	4	7	8	8	8	6
4	6	6	8	4	5	5	5	8

Ubahlah data di atas menjadi data berdistribusi frekuensi berkelompok.

Kemudian deskripsikan data tersebut dalam diagram batang.

3. Gaji karyawan suatu pabrik ditampilkan dalam tabel berikut.

Gaji (\times Rp 10.000)	Frekuensi
66 – 70	3
71 – 75	3
76 – 80	x
81 – 85	36
86 – 90	24
91 – 95	y
96 – 100	9

- a) Jika modus data di atas adalah Rp 830.000, dan banyak data 120, tentukanlah nilai $x-y$.
- b) Dengan menggunakan nilai x dan y , tentukanlah nilai Q_1 dan Q_2 .
- c) Tentukan rata-rata gaji jika setiap data mendapat tambahan sebesar Rp 50.000.



Projek

Himpunlah minimal lima permasalahan dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas, beberapa konsep perlu kita rangkum guna untuk mengingatkan kamu kembali akan konsep yang nantinya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Data adalah seluruh keterangan, informasi atau fakta tentang sesuatu hal atau permasalahan.
2. Data yang paling sering muncul disebut modus.
3. Jangkauan Data = Data tertinggi – Data terendah = $x_{maks} - x_{min}$.
4. Median adalah nilai tengah data, untuk data tunggal didefinisikan atas dua

a. Untuk data genap

$$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-}\left(\frac{n}{2}\right) + \text{Data ke-}\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2}, n : \text{banyak data}$$

b. Untuk data ganjil

$$\text{Median} = \text{Data ke-}\left(\frac{n+1}{2}\right), n : \text{banyak data}$$

5. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut *Kuartil*.
6. Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4 , sebab kuartil Q_1, Q_2 , dan Q_3 membagi data menjadi empat kelompok yang sama.
7. Statistik yang membagi data menjadi 10 bagian disebut *Desil*.
8. Jika banyak data ≥ 10 , maka kita dapat membagi data menjadi 10 kelompok yang sama, dengan setiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*.
9. *Mean* untuk data berkelompok didefinisikan dengan

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k}$$

dengan f_i = frekuensi kelas ke- i ; x_i = nilai tengah kelas ke- i .

10. *Mean* untuk data berkelompok dengan rumusan rata-rata sementara didefinisikan

$$\text{dengan } \bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^k f_i d_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \text{ dengan: } f_i = \text{frekuensi kelas ke-}i; \bar{x}_s = \text{rata-rata sementara}$$

11. Modus untuk data berkelompok didefinisikan dengan $M_o = t_b + k \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right]$

dengan t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas; d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya; d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.

12. Median untuk data berkelompok didefinisikan dengan $\text{Median} = t_b + k \left[\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \right]$

Dengan t_b = tepi bawah kelas median; k = panjang kelas; N = banyak data dari statistik terurut = $\bullet f_i$; F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median; f_m = frekuensi kelas median.

13. Penyajian data statistik yang sudah terkumpul dapat disajikan dalam bentuk tabel dan diagram.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar statistika. Konsep-konsep dasar di atas harus anda pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan anda sehari-hari. Selanjutnya kita akan membahas tentang peluang dari suatu kejadian dengan melakukan berbagai percobaan.

Bab 12

Peluang

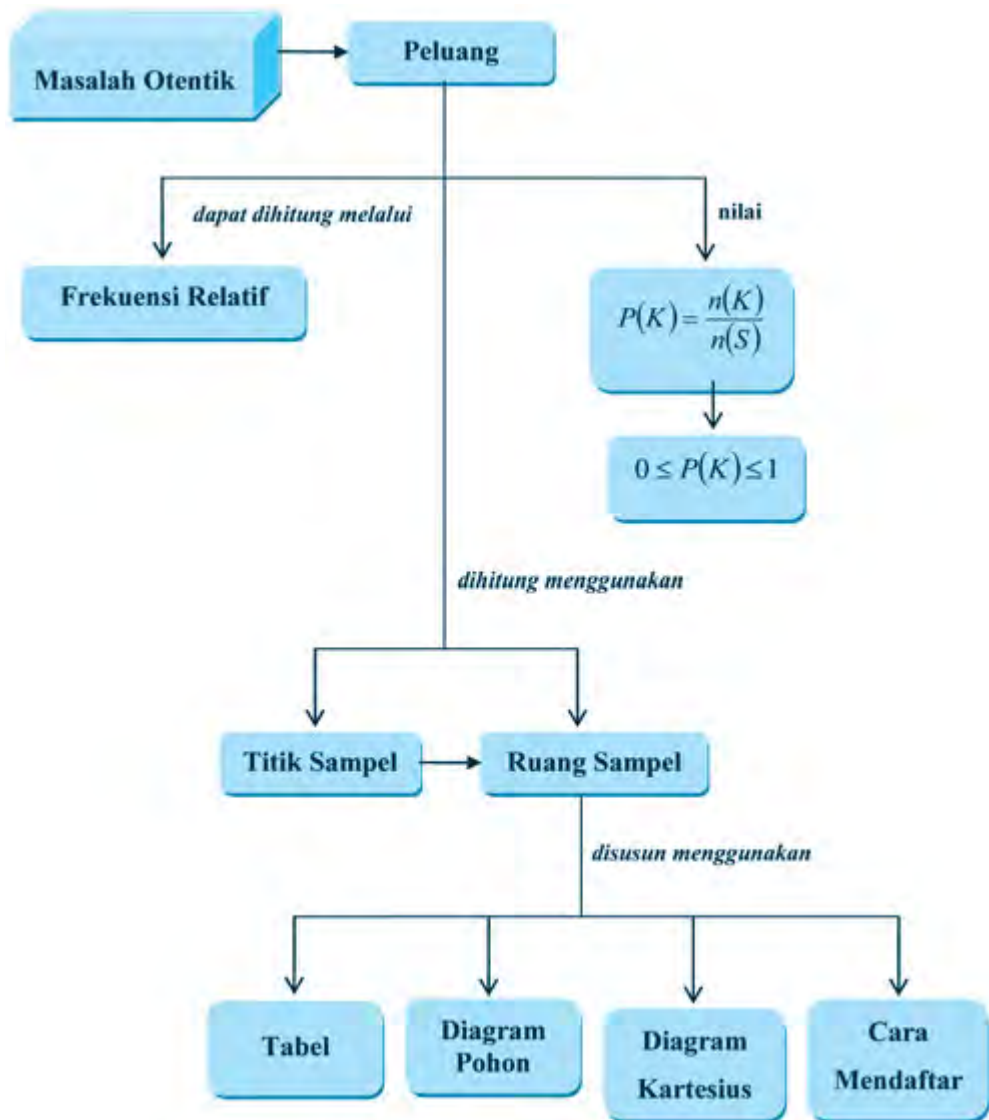
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<p>Melalui proses pembelajaran peluang, siswa mampu</p> <ol style="list-style-type: none">1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten, dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis;3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal, dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari;4. memahami konsep peluang suatu kejadian menggunakan berbagai objek nyata dalam suatu percobaan menggunakan frekuensi relatif;5. menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.	<p>Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">• berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip peluang melalui pemecahan masalah autentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan;• berkolaborasi memecahkan masalah otentik dengan pola interaksi edukatif;• berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip peluang dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Percobaan*
- *Kejadian*
- *Ruang Sampel*
- *Titik Sampel*
- *Frekuensi Relatif*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Peluang dengan Frekuensi Relatif

Pernahkah kamu melihat koin (uang logam)? Jika kamu perhatikan maka akan terdapat dua sisi, yaitu sisi angka dan sisi gambar. Jika koin tersebut dilambungkan (*ditos*) maka sisi koin yang akan muncul adalah gambar atau angka. Jika koin tersebut dilempar sebanyak satu kali, maka kemungkinan yang muncul bisa sisi gambar (*G*) atau angka (*A*). Jika koin dilempar sebanyak dua kali, maka kemungkinan sisi koin yang muncul *AA* atau *AG* atau *GG*. Bagaimana jika pelemparan koin tersebut dilakukan berkali-kali, apakah banyak sisi gambar dan banyak sisi angka yang muncul relatif sama?

Kegiatan 1

Lakukanlah kegiatan melempar sebuah koin sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan catatlah hasilnya ke dalam tabel berikut:

Tabel 12.1 Hasil dari Percobaan Pelemparan sebuah Koin

Tahap	Banyak Pelemparan	BMSG	BMSA	BMSG/BP	BMSA/BP
I	20	8	12	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$
II	40				
III	60				
IV	80				
V	100				
VI	120				

Keterangan:

BMSG adalah Banyak Muncul Sisi Gambar

BMSA adalah Banyak Muncul Sisi Angka

BP adalah Banyak Percobaan

Perhatikan data pada Tabel 12.1 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

- Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) munculnya gambar relatif sama dengan banyak (frekuensi) munculnya angka?

- b) Jika pelemparan koin tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi munculnya gambar dan angka?
- c) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom 3 dan 4, hasilnya relatif sama?
- d) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom 5 dan 6, hasilnya relatif sama dan nilai perbandingan banyaknya muncul gambar atau angka dengan banyaknya percobaan, nilainya perbandingannya mendekati $\frac{1}{2}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah koin adalah 20 kali dan hasilnya diperoleh frekuensi munculnya gambar adalah 8 kali dan munculnya angka adalah 12 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif munculnya gambar adalah 8 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(G) = \frac{8}{20}$. Frekuensi munculnya angka adalah 12 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(A) = \frac{12}{20}$.

Coba bandingkan frekuensi relatif tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel 12.1 di atas! Apakah keenam frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Kegiatan 2

Dalam kegiatan 2 ini, kita melakukan percobaan menggunakan dadu bermata 6. Lakukanlah kegiatan melambungkan sebuah dadu sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu satu kelompok. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan catatlah hasilnya ke dalam tabel berikut:

Tabel 12.2 Hasil dari Percobaan Pelemparan Sebuah Dadu Bermata 6

Tahap	Banyak Pelemparan	Frekuensi Muncul						Frekuensi Relatif					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
I	20												
II	40												
III	60												
IV	80												
V	100												
VI	120												

Perhatikan data pada Tabel 12.2 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut.

1. Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 relatif sama banyaknya?

2. Jika pelemparan dadu tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6?
3. Benarkah dugaan bahwa frekuensi munculnya angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 hasilnya relatif sama?
4. Benarkah dugaan bahwa frekuensi relatif angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 hasilnya relatif sama dan nilai perbandingan banyaknya muncul mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dengan banyaknya percobaan, nilainya perbandingannya mendekati $\frac{1}{6}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah dadu adalah 20 kali dan hasilnya diperoleh frekuensi munculnya mata 1 sampai mata 5 adalah 3 kali dan munculnya mata 6 adalah 5 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif munculnya mata 1, 2, 3, 4, dan 5 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(1) = \frac{3}{20}$. Frekuensi munculnya mata 2 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(2) = \frac{3}{20}$. Frekuensi munculnya mata 6 adalah 5 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(6) = \frac{5}{20}$. Selanjutnya coba bandingkan frekuensi relatif dari tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.1 di atas! Apakah keenam mata dadu memiliki frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Untuk lebih memahami frekuensi relatif perhatikan beberapa masalah di bawah ini:



Masalah-12.1



Gambar 12.1 Lampu LED

Hasil percobaan pemeriksaan kualitas 20 lampu LED di suatu laboratorium fisika diperoleh hasil lampu berkualitas baik 12 dan 8 lampu berkualitas buruk. Tentukanlah frekuensi relatif dari tiap-tiap hasil percobaan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dari data di atas dapat kita bentuk dalam tabel berikut:

Tabel 12.3 Hasil Percobaan Kulit Lampu

Kejadian	Frekuensi
Baik	12
Buruk	8
Total	20

Dengan menggunakan data tabel di atas dapat kita peroleh:

- a. Diketahui: frekuensi kualitas baik = 12
total seluruh percobaan = 20
maka frekuensi relatif kualitas baik adalah:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi kualitas baik}}{\text{Total percobaan}}$$

$$\begin{aligned}\text{Frekuensi relatif bola lampu kualitas baik} &= \frac{12}{20} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

- b. Diketahui: frekuensi kualitas buruk = 8
total seluruh percobaan = 20
maka frekuensi relatif bola lampu kualitas buruk adalah:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi kualitas rusak}}{\text{Total percobaan}}$$

$$\begin{aligned}\text{Frekuensi relatif bola lampu kualitas buruk} &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$



Masalah-12.2



Gambar 12.2 Putaran jarum jam

Dari 80 percobaan putaran jarum jam pada gambar di samping diperoleh:

Tabel 12.4 Hasil Percobaan Putaran Jam

Angka	1	2	3
Frekuensi	25	30	25

Tentukanlah frekuensi relatif tiap angka yang diperoleh dari percobaan di atas? Tentukanlah total frekuensi relatif percobaan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

I. Dengan menggunakan data dari Tabel 12.4 dapat diperoleh:

a) Frekuensi relatif muncul angka 1, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{Frekuensi relatif} &= \frac{\text{Frekuensi muncul angka 1}}{\text{Total percobaan}} \\ &= \frac{25}{80}\end{aligned}$$

b) Frekuensi relatif muncul angka 2, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{Frekuensi relatif} &= \frac{\text{Frekuensi muncul angka 2}}{\text{Total percobaan}} \\ &= \frac{30}{80}\end{aligned}$$

c) Frekuensi relatif muncul angka 3, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{Frekuensi relatif} &= \frac{\text{Frekuensi muncul angka 3}}{\text{Total percobaan}} \\ &= \frac{25}{80}\end{aligned}$$

II. Dari frekuensi relatif tiap-tiap muncul angka diperoleh total frekuensi relatif putaran jam, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{Total frekuensi} &= \frac{25}{80} + \frac{30}{80} + \frac{25}{80} \\ &= 1\end{aligned}$$

Berdasarkan kedua kegiatan dan permasalahan di atas, mari kita tetapkan pengertian frekuensi relatif kejadian munculnya suatu objek dalam sebuah percobaan, sebagai berikut.



Definisi 12.1

Misalkan K suatu kejadian dalam suatu percobaan. Frekuensi Relatif Kejadian K ($f_r(K)$) adalah hasil bagi banyaknya hasil dalam K dengan banyaknya percobaan.

Berdasarkan informasi di atas, proses menghitung peluang suatu kejadian dengan pendekatan nilai frekuensi relatif dapat dirumuskan sebagai berikut:

- a. Misalkan suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali. Jika kejadian K muncul sebanyak k kali ($0 < k < n$), maka frekuensi relatif munculnya kejadian K ditentukan dengan rumus:

$$f_r(K) = \frac{k}{n}$$

- b. Jika n mendekati tak-hingga maka cenderung konstan mendekati nilai tertentu. Nilai tertentu ini adalah peluang munculnya kejadian K . Dengan demikian, peluang munculnya kejadian K ditentukan dengan rumus

$$P(K) = C, C \text{ konstanta}$$

Ingat!

Frekuensi relatif akan mendekati peluang jika percobaan dilakukan sebanyak mungkin.

2. Pengertian Percobaan, Kejadian, Titik Sampel dan Ruang Sampel

Perhatikan ilustrasi berikut ini!

Ilustrasi 12.1



Gambar 12.3 Lampu LED

Divisi *quality control* suatu perusahaan lampu ingin menguji coba kualitas produk lampu baru model *LED*. Dua kemungkinan hasil yang diperoleh pada percobaan ini adalah Buruk (R) dan Baik (B). Jika terdapat dua buah lampu yang akan diuji maka tentukanlah kemungkinan-kemungkinan hasil percobaan tersebut.

Penyelesaian

Pengambilan sebuah bola lampu, kemungkinan yang terjadi adalah Buruk (R) dan Baik (B).

Dalam sekali percobaan sekaligus, maka akan terdapat 4 kemungkinan yang akan terjadi, yaitu BB , RB , BR , dan RR . Kemungkinan-kemungkinan tersebut dinamakan anggota ruang sampel. Untuk menentukan ruang sampel dapat disajikan dengan beberapa cara sebagai berikut!

$$S = \{(R,R), (R,B), (B,R), (B,B)\} \text{ dengan } n(S) = 4.$$

Ilustrasi 12.2



Gambar 12.4
Putaran Menu Sarapan

Seorang koki menentukan menu sarapan siswa asrama sekolah dengan menggunakan putaran jarum jam. Kemungkinan hasil yang muncul pada satu percobaan pemutaran jarum jam tersebut adalah roti isi (R), nasi goreng (N), lontong sayur (L). dapatkah kamu menentukan kemungkinan hasil-hasil yang muncul untuk dua kali putaran?

Penyelesaian

Dari hasil satu kali pemutaran jarum jam, kemungkinan hasil percobaan tersebut adalah:

- $\{R\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan roti isi
- $\{N\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan nasi goreng
- $\{L\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan lontong sayur.

Himpunan kemungkinan hasil dari pemutaran jarum jam dapat ditulis: $S = \{R,N,L\}$ dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 3$.

Dengan mendaftarkan setiap kemungkinan hasil yang muncul untuk dua kali percobaan pemutaran jarum jam dapat diperoleh:

$$S = \{(R,R), (R,N), (R,L), (N,R), (N,N), (N,L), (L,R), (L,N), (L,L)\}$$

$$n(S) = 9$$

- Coba kamu perluas contoh di atas dengan menambahkan menu sarapan dan jumlah putaran jam! Hasil apa saja yang kamu peroleh? Diskusikan bersama teman kelompokmu!

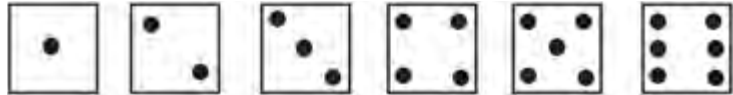
Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 12.1



Gambar 12.5
Dadu sisi enam

Pada kegiatan pelemaran sebuah dadu sisi enam, akan dihasilkan enam kemungkinan munculnya mata dadu. Kemungkinan-kemungkinan itu disajikan sebagai berikut.



Gambar 12.6 Hasil pelemaran sebuah dadu

Kegiatan melempar dadu disebut dengan **percobaan**. Enam kemungkinan hasil seperti yang disajikan pada Gambar 12.6 adalah semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan. Hasil munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 adalah titik-titik contoh. Jadi titik contoh adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan. **Ruang Sample (S)** adalah suatu himpunan yang anggotanya adalah titik-titik sample. Adapun yang menjadi ruang contoh dari hasil pelemaran sebuah dadu adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Kejadian (E) merupakan himpunan bagian dari ruang contoh. Pada percobaan pelemaran satu buah dadu sisi enam kejadian-kejadiannya adalah

- $\{1\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 1.
- $\{2\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 2.
- $\{3\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 3.
- $\{4\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 4.
- $\{5\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 5.
- $\{6\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 6.

Perhatikan ilustrasi berikut ini!



Gambar 12.7 Dua dadu

Pada kegiatan pelemaran dua dadu sekaligus, akan dihasilkan 36 kemungkinan munculnya pasangan mata dadu. Kemungkinan-kemungkinan itu disajikan pada tabel ruang contoh dari hasil pelemaran dua dadu, sebagai berikut:

Tabel 12.5 Ruang Sampel dari Hasil Pelemparan Dua Dadu

Dadu (I/II)	1	2	3	4	5	6
1	{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2	{2,1}	{2,2}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3	{3,1}	{3,2}	{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4	{4,1}	{4,2}	{4,3}	{4,4}	{4,5}	{4,6}
5	{5,1}	{5,2}	{5,3}	{5,4}	{5,5}	{5,6}
6	{6,1}	{6,2}	{6,3}	{6,4}	{6,5}	{6,6}

Kegiatan melempar dua dadu di atas disebut dengan **percobaan**. Banyak hasil yang mungkin terjadi adalah 36. Jadi banyak titik sampelnya 36 buah. Himpunan dari semua kejadian yang mungkin terjadi atau himpunan dari semua titik-titik sampel dinamakan **Ruang Sampel (S)**. Kejadian (K) merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Misalnya kejadian (K) adalah muncul mata dadu pertama dan kedua yang jika dijumlahkan hasilnya adalah 6. Kemungkinan pasangan mata dadu yang muncul dengan jumlah 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1). Jadi kejadian (K) dapat ditulis $K = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$.

3. Cara Penyajian dan Penentuan Ruang Sampel



Masalah-12.3

Seorang raja ingin memberikan hadiah kepada pengawalnya yang sudah mengabdikan dengan baik selama 30 tahun. Raja tersebut memiliki uang sebesar 60 milyar rupiah. Jumlah uang yang akan diberikan tergantung pilihan pengawal dari hasil pelemparan dua buah koin sekaligus sebanyak 30 kali pelemparan. Jika pilihan pengawal tersebut adalah munculnya dua gambar (GG) atau dua angka (AA) maka pengawal tersebut mendapat hadiah 1 milyar rupiah dalam satu kali pelemparan. Jika pilihan pengawal adalah munculnya angka dan gambar (AG) atau gambar dan angka (GA) sebanyak 15 kali dari 30 pelemparan maka pengawal memperoleh hadiah 25 milyar. Agar pengawal mendapat uang yang lebih banyak, mana yang menjadi pilihan pengawal tersebut dan berapa maksimal uang yang ia peroleh.

Coba selesaikan masalah di atas setelah mempelajari hal berikut.



Masalah-12.4

Dalam sekali pelemparan dua buah koin, maka akan terdapat 3 kemungkinan yang akan terjadi, yaitu AA, AG, GA, dan GG. Kemungkinan-kemungkinan tersebut dinamakan anggota ruang sampel. Untuk menentukan ruang sampel dapat disajikan sebagai berikut!

Terdapat empat kemungkinan hasil yang muncul pada suatu pelemparan dua koin, yaitu:

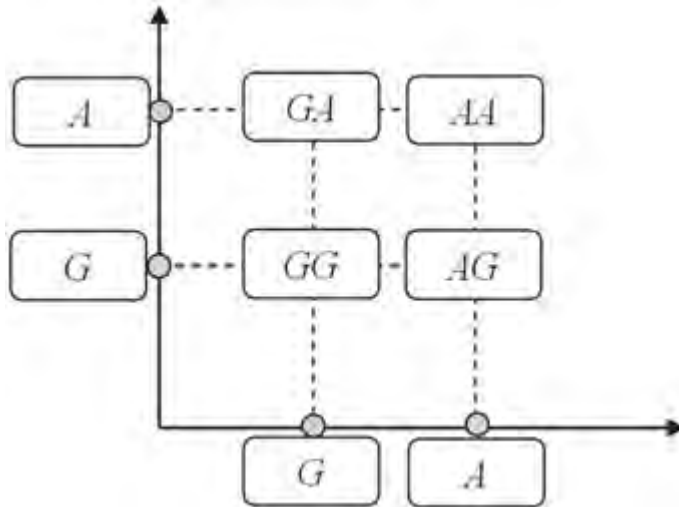
- Koin I muncul A, dan koin II muncul A.
- Koin I muncul A, dan koin II muncul G.
- Koin I muncul G, dan koin II muncul A.
- Koin I muncul G, dan koin II muncul G.



Gambar 12.8 Dua koin

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan diagram kartesius dapat diinterpretasikan cara penyajian kemungkinan hasil tersebut, yaitu sebagai hasil pemetaan dua titik yang berurutan pada sumbu absis dan ordinat, yaitu:



Gambar 12.9 Diagram kartesius ruang sampel dua koin

Karena ruang contoh adalah himpunan semua hasil yang mungkin maka dari pelemparan dua koin sekaligus diperoleh $S = \{(A,A), (A,G), (G,A), (G,G)\}$ dengan $n(S) = 4$. Misalkan kejadian K adalah munculnya hanya satu sisi angka maka

$K = \{(A,G), (G,A)\}$ dengan $n(K) = 2$.



Masalah-12.5

Suatu kotak berisi 4 kelereng merah dan 2 kelereng biru. Dilakukan percobaan dengan mengambil 2 kelereng sekaligus. Dapatkah kamu menentukan kemungkinan hasil yang diperoleh 1 bola merah dan 1 bola biru dari percobaan tersebut? Jika kejadian K adalah munculnya dua kelereng merah sekaligus maka tentukanlah kemungkinan hasil dalam kejadian K .

Alternatif Penyelesaian

Misalkan keempat kelereng merah disimbolkan dengan M_1, M_2, M_3, M_4 , dan dua kelereng biru disimbolkan B_1, B_2 maka dengan menggunakan cara tabulasi (tabel) dapat dituliskan seluruh kemungkinan hasil yang muncul dari pengambilan dua kelereng sekaligus sebagai berikut:

Tabel 12.6 Tabel Kemungkinan Hasil Pencabutan Kelereng

Kelereng	M_2	M_3	M_4	B_1	B_2
M_1	(M_1, M_2)	(M_1, M_3)	(M_1, M_4)	(M_1, B_1)	(M_1, B_2)
M_2	–	(M_2, M_3)	(M_2, M_4)	(M_2, B_1)	(M_2, B_2)
M_3	–	–	(M_3, M_4)	(M_3, B_1)	(M_3, B_2)
M_4	–	–	–	(M_4, B_1)	(M_4, B_2)
B_1	–	–	–	–	(M_1, B_2)
B_2	–	–	–	–	–

dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 15$.

Kejadian K adalah munculnya dua kelereng merah sekaligus diperoleh:

$K = \{(M_1, M_2), (M_1, M_3), (M_1, M_4), (M_2, M_3), (M_2, M_4), (M_3, M_4)\}$

dengan banyak anggota kejadian $n(K) = 6$.



Masalah-12.6

Suatu kotak berisi 4 kelereng merah dan 2 kelereng hijau. Dilakukan percobaan dengan mengambil 3 kelereng sekaligus. Tentukanlah:

- Kemungkinan kejadian K_1 adalah munculnya dua kelereng merah dan satu kelereng hijau.
- Kemungkinan kejadian K_2 adalah munculnya tiga kelereng merah sekaligus
- Kemungkinan K_3 hasil yang diperoleh paling sedikit 2 bola merah dari percobaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan keempat kelereng merah disimbolkan dengan M_1, M_2, M_3, M_4 , dan dua kelereng hijau disimbolkan H_1, H_2 maka dengan cara mendaftar diperoleh kemungkinan hasil yang muncul pada percobaan di atas, yaitu:

$$S = \{(M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_2, H_1), (M_1, M_2, H_2), (M_1, M_3, M_4), (M_1, M_3, H_1), (M_1, M_3, H_2), (M_1, M_4, H_1), (M_1, M_4, H_2), (M_1, H_1, H_2), (M_2, M_3, M_4), (M_2, M_3, H_1), (M_2, M_3, H_2), (M_2, M_4, H_1), (M_2, M_4, H_2), (M_2, H_1, H_2), (M_3, M_4, H_1), (M_3, M_4, H_2), (M_3, H_1, H_2), (M_4, H_1, H_2)\}$$

dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 20$.

- Kejadian K_1 adalah munculnya dua kelereng merah dan satu kelereng hijau sekaligus diperoleh:

$$K_1 = \{(M_1, M_2, H_1), (M_1, M_2, H_2), (M_1, M_3, H_1), (M_1, M_3, H_2), (M_1, M_4, H_1), (M_1, M_4, H_2), (M_2, M_3, H_1), (M_2, M_3, H_2), (M_2, M_4, H_1), (M_2, M_4, H_2), (M_3, M_4, H_1), (M_3, M_4, H_2)\}$$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_1) = 12$.

- Kejadian K_2 adalah munculnya tiga kelereng merah sekaligus diperoleh:

$$K_2 = \{(M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4), (M_2, M_3, M_4)\}$$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_2) = 4$.

- Kejadian K_3 adalah munculnya paling sedikit dua kelereng merah diperoleh:

$$K_3 = \{(M_1, M_2, H_1), (M_1, M_2, H_2), (M_1, M_3, H_1), (M_1, M_3, H_2), (M_1, M_4, H_1), (M_1, M_4, H_2), (M_2, M_3, H_1), (M_2, M_3, H_2), (M_2, M_4, H_1), (M_2, M_4, H_2), (M_3, M_4, H_1), (M_3, M_4, H_2), (M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4), (M_2, M_3, M_4)\}$$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_3) = 16$.

Latihan 12.2

1. Pada pelemparan dua buah dadu, K merupakan kejadian munculnya mata dadu yang jumlahnya lebih besar sama dengan dua., tentukanlah kejadian K ?
2. Mungkinkah suatu kejadian sama dengan ruang sampel.
3. Dapatkah kamu temukan kejadian diluar K ? Jelaskan.
4. Untuk percobaan-percobaan di atas, cara penyajian ruang sampel dan titik sampel manakah yang lebih baik? Berikan alasan!

Dari pola yang terbentuk dalam penentuan banyaknya anggota ruang sampel menggunakan 1, 2, dan 3 objek percobaan seperti koin dan dadu kita dapat mengetahui berapa banyak anggota ruang contoh dengan menggunakan n objek percobaan. Perhatikan pola yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 12.7 Tabel Penentuan Anggota Ruang Sampel

Banyak Objek	Banyak anggota ruang sampel $n(S)$	
	Koin	Dadu
1	$2 = 2^1$	$6 = 6^1$
2	$4 = 2^2$	$36 = 6^2$
3	$8 = 2^3$	$216 = 6^3$
\vdots	\vdots	\vdots
N	2^n	6^n

Secara umum, untuk menghitung banyaknya anggota ruang sampel dalam pelemparan n buah koin dan n buah dadu dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat-1

1. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n koin adalah 2^n .
2. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n dadu adalah 6^n .



Masalah-12.7

Dhani melakukan percobaan dengan melambungkan tiga buah mata koin ke atas secara bersamaan. Tentukan ruang sampel dan banyak anggota ruang sampel.

Alternatif Penyelesaian

Dalam setiap pelemparan 3 buah koin sekaligus, akan muncul tiga sisi koin. Kita daftar setiap kejadian yang mungkin yang terjadi dari satu kali pelemparan 3 koin sekaligus. Semua kemungkinan munculnya sisi koin adalah (A,A,A) , (A,A,G) , (A,G,A) , (G,A,A) , (G,G,A) , (G,A,G) , (A,G,G) , dan (G,G,G) . Dengan demikian ruang sampel percobaan tersebut adalah

$S = \{(A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), (G,G,G)\}$. Banyak anggota ruang sampel adalah $n(S) = 8$.



Masalah-12.8

Tiga dadu yang berbeda warna, yakni merah, biru, dan kuning dilempar bersama-sama. Hitunglah banyak kemungkinan hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu yang muncul adalah 8?

Alternatif Penyelesaian

Pandang satu dadu, yaitu dadu merah. Ada beberapa kemungkinan hasil yang akan muncul agar jumlah 3 mata dadu adalah 8. Berbagai kemungkinan hasil yang terjadi disajikan sebagai berikut.

- ◆ Jika dadu merah muncul angka 1 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 7. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, dan $(6,1)$.
- ◆ Jika dadu merah muncul angka 2 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 6. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ dan $(5,1)$.
- ◆ Jika dadu merah muncul angka 3 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 5. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, dan $(4,1)$.
- ◆ Jika dadu merah muncul angka 4 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 4. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah $(1,3)$, $(2,2)$, dan $(3,1)$.

- ◆ Jika dadu merah muncul angka 5 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 3. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,2) dan (2,1).
- ◆ Jika dadu merah muncul angka 6 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 2. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,1).

Jadi, banyak kemungkinan hasil yang terjadi dalam pelemparan 3 buah dadu secara bersama-sama dengan syarat jumlah ketiga mata dadu yang muncul 8 adalah $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Coba selesaikan dengan cara yang lain!

Latihan 12.3

Tentukanlah banyak kemungkinan hasil yang terjadi dari hasil pelemparan 3 dadu dengan syarat jumlah ketiga mata dadu yang muncul adalah 9.

Berdasarkan berbagai informasi yang diperoleh dari hasil percobaan di atas, kita tetapkan definisi titik sampel, ruang sampel, dan kejadian sebagai berikut.



Definisi 12.2

1. Titik sampel adalah hasil yang mungkin dari sebuah percobaan.
2. Ruang sampel (S) adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.
3. Kejadian (K) adalah himpunan bagian dari ruang sample.

Berdasarkan definisi titik sampel dan ruang sampel di atas, kita tetapkan definisi peluang suatu kejadian sebagai berikut.



Definisi 12.3

Peluang suatu kejadian K adalah hasil bagi banyak hasil dalam K dengan banyak anggota ruang sampel dari suatu percobaan, ditulis:

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$$

$n(K)$: Banyak hasil dalam K .

$n(S)$: Banyak anggota ruang sampel.



Masalah-12.9

Dalam pelemparan dua dadu sekaligus, tentukan peluang munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 1, 2, 3, 4, ..., 12. Kemudian tentukan juga peluang munculnya dua mata dadu yang jumlahnya lebih dari atau sama dengan 2 dan kurang dari atau sama dengan 12.

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan mendaftar nilai peluang dari semua kemungkinan yang terjadi dan hasil penjumlahan dua mata dadu yang muncul, disajikan tabel sebagai berikut.

Tabel 12.8 Peluang Penjumlahan Dua Dadu

Jumlah	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumlah Dua Mata Dadu yang Muncul	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Peluang	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Jumlah dua mata dadu yang muncul (x), dengan $2 \leq x \leq 12$	36											
Peluang	$\frac{36}{36} = 1$											



Masalah-12.10

Di awal pertandingan olah raga kartu bridge, seorang pemain mencabut sebuah kartu untuk mendapatkan kartu as untuk menjadi tambahan nilainya. Jika dalam satu set kartu bridge ingin dicabut kartu as sekop (lihat Gambar 12.10). Tentukan nilai ruang sampel dan nilai peluang terambilnya kartu as sekop! Berapa peluang terambilnya kartu bernomor 10?



Gambar 12.10 Kartu Bridge

Alternatif Penyelesaian

Pada percobaan menggunakan satu set kartu bridge terdapat empat jenis kartu, yakni: wajik (\diamond), hati (\heartsuit), klaver (\clubsuit), dan sekop (\spadesuit).

Jika dimisalkan wajik = W ; hati = H ; klaver = K ; dan sekop = S maka ruang sampel dari satu set kartu bridge adalah:

$$S = \{(ks), (qs), (js), (10s), (9s), (8s), (7s), (6s), (5s), (4s), (3s), (2s), (ass), (kk), (qk), (jk), (10k), (9k), (8k), (7k), (6k), (5k), (4k), (3k), (2k), (ask), (kh), (qh), (jh), (10h), (9h), (8h), (7h), (6h), (5h), (4h), (3h), (2h), (ash), (kw), (qw), (jw), (10w), (9w), (8w), (7w), (6w), (5w), (4w), (3w), (2w), (asw)\}$$

Misal K_1 adalah pengambilan kartu *as* sekop, maka diperoleh $K_1 = \{(ass)\}$ sehingga $n(K_1) = 1$.

Jadi, peluang terambilnya kartu as sekop adalah:

$$P = (K_1) = \frac{n(K_1)}{n(S)} = \frac{1}{52}$$

Misal E_2 adalah pengambilan kartu bernomor 10, maka diperoleh $K_2 = \{(10w), (10h), (10k), (10s)\}$, sehingga $n(K_2) = 4$

Jadi, peluang terambilnya kartu bernomor 10 adalah:

$$P = (K_2) = \frac{n(K_2)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Berdasarkan berbagai pemecahan masalah penentuan nilai peluang suatu kejadian yang telah diuraikan di atas, maka nilai peluang suatu kejadian dapat dipastikan terletak pada interval $[0, 1]$. Kita tetapkan sifat nilai peluang sebagai berikut.

Sifat-3

Misalkan K suatu kejadian dan S adalah ruang contoh dalam sebuah percobaan.

1. Peluang kejadian K memenuhi $P(K)$, $0 \leq P(K) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$

Peluang suatu kejadian adalah 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti terjadi dan peluang kejadian adalah 0 berarti bahwa kejadian tersebut mustahil terjadi. Peluang tersebut dapat diinterpretasikan pada gambar berikut.



Gambar 12.11 Interpretasi peluang

Contoh 12.2

Contoh sederhana kejadian yang pasti terjadi adalah kejadian munculnya angka mata dadu kurang dari 7 dalam pelambungan mata dadu adalah 1. Kejadian ini pasti terjadi. Sudahkah tahu kamu alasannya? Jelaskan!

Penyelesaian

Misalkan A , B adalah kejadian dan S adalah ruang sampel dari suatu percobaan. Buktikan jika $A, B \subseteq S$ maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:

Ingat kembali materi himpunan yang telah dipelajari di SMP. Kita telah pelajari operasi gabungan dan irisan dua himpunan. Kita ketahui bahwa

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\&= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cup B)}{n(S)} \\&= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cup B)}{n(S)}\end{aligned}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Latihan 12.4

Untuk semua kejadian A_1, A_2, A_3, \dots dimana $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Buktikan bahwa

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)!$$



Uji Kompetensi 12.1

1. Ambil sebuah paku payung sebagai percobaan, lempar hingga jatuh ke lantai. Dapatkah kamu menentukan ruang sampel dan titik sampelnya? Adakah kamu temukan? Jelaskan.
2. Dua buah dadu dilemparkan dan menghasilkan bilangan prima pada salah satu mata dadu. Buatlah ruang sampel beserta titik contohnya!
3. Jika sebuah dadu dan sebuah mata koin dilemparkan secara bersamaan. Dengan menggunakan diagram pohon tentukan ruang contoh percobaan tersebut?
4. Luna ingin menghadiri sebuah pesta, ia memiliki baju blus bunga kotak-kotak dan bergaris untuk pasangan rok berwarna biru tua, coklat, dan putih. hitunglah berapa banyak pasangan pakaian yang dapat dipakai Luna jika ia juga membeli blus motif polos?
5. Lambungkan tiga mata dadu secara bersamaan, tentukanlah ruang sampel dari tiga buah dadu tersebut!
6. Menu minuman hari ini di rumah makan Minang adalah teh, kopi, dan jus. Sedangkan menu makanan berupa nasi rendang, nasi ayam, nasi rames, dan nasi kebuli. Berapa banyak pilihan yang dapat dipesan oleh pengunjung? Sajikan dalam diagram pohon.
7. Dari kota Bekasi ke kota Depok dilayani oleh 4 bus dan dari Depok ke Bogor oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota Bekasi ke kota Bogor melalui Depok kemudian kembali lagi ke Bekasi juga melalui Depok. Jika saat kembali dari Bogor ke Bekasi, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka banyak cara perjalanan orang tersebut?

8. Dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 7 akan dibentuk bilangan dengan 4 angka dan tidak boleh ada angka yang diulang.
 - a. Berapa banyak bilangan dapat dibentuk?
 - b. Berapa banyak bilangan ganjil yang dapat dibentuk?
 - c. Berapa banyak bilangan yang nilainya kurang dari 5.000 yang dapat dibentuk?
9. Anggap satu tahun 365 hari. jika 20 orang dipilih secara acak, maka peluang ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah . . .
10. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 warna hitam, 6 warna putih dan 7 warna hijau. jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah
11. Lima orang akan pergi ke pantai menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa jadi sopir, maka banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka di dalam mobil adalah



Projek

Rancanglah minimal lima buah masalah dan terapkan konsep dan prinsip peluang dalam pemecahannya. Masalah tersebut dirancang dari dunia nyata di sekitarmu. Buatlah laporan dan sajikan hasilnya di depan kelas.

4. Peluang Komplemen Suatu Kejadian



Masalah-12.11

Pada pelemparan sebuah dadu, tentukan peluang munculnya angka ganjil pada dadu, melalui penentuan peluang munculnya angka genap pada dadu!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan K adalah kejadian munculnya angka genap pada dadu dan K^c adalah kejadian munculnya angka ganjil pada dadu. Dengan demikian $K = \{2,4,6\}$ dan $K^c = \{1,3,5\}$.

Peluang kejadian K adalah $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} =$

Sedangkan peluang kejadian K^c adalah $P(K^c) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



Masalah-12.12

Tentukanlah peluang munculnya dadu yang berjumlah kurang dari atau sama dengan 10 pada pelemparan 2 dadu.

Alternatif Penyelesaian

Sebelumnya telah kita ketahui banyaknya anggota ruang sampel dalam pelemparan 2 mata dadu adalah 36. Kemungkinan munculnya mata dadu yang berjumlah kurang atau sama dengan 10, yaitu jumlah dua mata dadu yang hasilnya 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

Misalkan K adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya kurang dari atau sama dengan 10 dan K^c adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang berjumlah lebih dari 10, yaitu jumlah dua mata dadu adalah 11 dan 12. Kemungkinan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 11 dan 12 adalah $K^c = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$ atau $n(K^c) = 3$.

$$\text{Jadi, } P(K^c) = \frac{n(K^c)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\text{karena } P(K) = 1 - P(K^c)$$

$$P(K) = 1 - \frac{1}{12}$$

$$P(K) = \frac{11}{12}$$

Jadi, peluang munculnya angka mata dadu yang berjumlah kurang dari atau sama dengan 10 adalah $\frac{11}{12}$.

Dari hasil pemecahan kedua masalah di atas, ternyata jumlah peluang kejadian K dan peluang kejadian bukan K atau K^c adalah 1. Secara matematis kita dapat rumuskan bahwa:

Sifat-1

Misalkan K suatu kejadian dari sebuah percobaan, maka $P(K) + P(K^c) = 1$ atau $P(K) = 1 - P(K^c)$

Untuk lebih mendalami sifat di atas, perhatikan masalah berikut!



Masalah-13

Putra melambungkan n dadu, kemudian ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah, agar peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6, peluangnya paling besar?

Alternatif Penyelesaian

Karena dadu yang dilambungkan bermata enam, maka jumlah setiap n mata dadu adalah kurang dari atau sama dengan enam ($n \leq 6$).

Misalkan $D_n = \{\text{jumlah mata dadu } 6, n \leq 6\}$, diperoleh:

$$D_1 = \{6\}$$

$$D_2 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$D_3 = \{(1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (4,1,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$$

$$D_4 = \{(1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,1,3,1), (1,3,1,1), (2,2,1,1), (2,1,2,1), (3,1,1,1), (3,2,1,1)\}$$

$$D_5 = \{(1,1,1,1,2), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,2,1)\}$$

$$D_6 = \{1,1,1,1,1,1\}$$

Maka diperoleh peluangnya masing-masing:

$$\bullet P(D_1) = \frac{1}{6} \qquad \bullet P(D_4) = \frac{9}{6^4}$$

$$\bullet P(D_2) = \frac{5}{6^2} \qquad \bullet P(D_5) = \frac{5}{6^5}$$

$$\bullet P(D_3) = \frac{10}{6^3} \qquad \bullet P(D_6) = \frac{1}{6^6}$$

Jadi, peluang terbesar munculnya jumlah mata dadu jumlahnya 6 adalah saat $n = 1$ dengan nilai peluangnya $\frac{1}{6}$.



Contoh 12.3

Misalkan A , B adalah kejadian dan S adalah ruang sampel dari suatu percobaan. Buktikan jika A , $B \subseteq S$ maka $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Penyelesaian

Ingat kembali materi himpunan yang telah dipelajari di SMP. Kita telah pelajari operasi gabungan dan irisan dua himpunan. Kita ketahui bahwa

$$\begin{aligned}n(B \cup A^c) &= n(B) + n(A^c) - n(B \cap A^c) \\&= n(B) + n(S) - n(A) - n(B \cap A^c) \\&= n(B) + n(S) - (n(A) + n(B \cap A^c)) \\&= n(B) + n(S) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) \\&= n(B) + n(S) - n(A \cup B)\end{aligned}$$

- 1) Jika kejadian A saling lepas dengan kejadian B , maka $A \cap B = \emptyset$
- 2) Jika kejadian A tidak saling lepas dengan kejadian B , maka $A \cap B \neq \emptyset$

Dengan demikian $n(B \cap A^c) = n(B) - n(A \cap B)$

$$\begin{aligned}P(B \cap A^c) &= \frac{n(B \cap A^c)}{n(S)} \\&= \frac{n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} \\&= \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\&= P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

Jadi, $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$



Uji Kompetensi 12.2

1. Setelah lulus SMA, mungkin seba-gian dari kamu berniat melanjutkan ke tingkat yang lebih tinggi yakni perguruan tinggi. Jika anda memilih sebuah jurusan pada PTN selain mempertimbangkan minat dan bakat, Kamu perlu juga mempertimbangkan kemungkinan masuk jurusan tersebut. Dengan

membandingkan data sebelumnya mengenai banyaknya orang yang memilih jurusan tersebut dengan daya tampungnya menjadi salah satu triknya. Misalkan, Kamu akan memilih jurusan A dan B. Jurusan A pada tahun sebelumnya dipilih oleh 3432 orang dan daya tampungnya 60. Adapun jurusan B dipilih oleh

- 2897 dengan daya tampung 50. Jurusan manakah peluang kamu lulus lebih besar?
2. Tiga mata dadu dilemparkan secara bersamaan. Jika K adalah kejadian jumlah tiga mata dadu >10 .
 - Berapakah peluang kejadian K ?
 - Hitunglah Peluang diluar kejadian K ?
 3. Nomor plat kendaraan terdiri dari empat digit angka, Misalkan K kejadian no plat merupakan bilangan berulang. tentukan peluang K .
 4. Ahok, Badu, Carli, dan Dido akan berfoto bersama secara berdampingan. Hitung peluang Ahok dan Carli selalu berdampingan?
 5. Peluang seorang pemain basket akan melempar bola tepat masuk ring 0,7. Jika ia melempar sebanyak 70 kali, hitunglah kemungkinan banyaknya bola yang tepat masuk ring?
 6. Kelas XIIA terdiri dari 10 murid laki-laki dan 20 murid perempuan. Setengah dari jumlah murid laki-laki dan setengah dari jumlah murid perempuan berambut keriting. Apabila seorang murid dipilih secara acak untuk mengerjakan soal, Berapakah peluang bahwa murid yang terpilih itu laki-laki atau berambut keriting?
 7. Jika sebuah dadu dilempar 5 kali. Berapakah peluang mata dadu yang muncul selalu ganjil?
 8. Tetangga baru yang belum kamu kenal katanya mempunyai 2 anak. Kamu tahu salah satunya adalah laki-laki. Hitung Peluang kedua anak tetangga baru kamu semuanya laki-laki?
 9. Dalam sebuah klinik dokter spesialis kandungan terdapat enam pasang suami-isteri. Jika dipilih dua orang secara acak dari ruangan tersebut, maka peluang terpilihnya dua orang tersebut suami-isteri?
 10. Dua puluh tiket diberi nomor dari 1 sampai dengan 20. Setiap tiket diambil secara acak dan punya peluang yang sama untuk terpilih. Berapa probabilitas bahwa tiket yang terpilih ialah tiket dengan nomor berkelipatan 3 atau 5?
 11. Anggap satu tahun 365 hari. jika 20 orang dipilih secara acak, maka peluang ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah. . .
 12. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 warna hitam, 6 warna putih dan 7 warna hijau. jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah



Projek

Himpun minimal lima sifat peluang dari berbagai sumber (internet, buku, dan sumber lain). Buktikan kelima sifat tersebut dan buatlah laporan hasil kerjamu serta sajikan di dalam kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep peluang di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. *Frekuensi relatif* dari suatu kejadian dalam suatu percobaan adalah perbandingan banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu percobaan dengan banyaknya percobaan dilakukan. Ditulis

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Banyak kejadian yang muncul}}{\text{Banyak percobaan}}$$

2. Titik contoh adalah semua kejadian yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan.
3. Ruang contoh (S) adalah suatu himpunan yang anggotanya semua kejadian yang mungkin terjadi dalam percobaan atau suatu himpunan yang anggotanya titik-titik contoh.
4. Kejadian (K) adalah himpunan bagian dari ruang contoh S .
5. Ada beberapa cara untuk menyajikan semua kejadian yang mungkin muncul dalam suatu percobaan, yaitu: cara mendaftar, menggunakan diagram cartesisus, menggunakan tabel, dan menggunakan diagram pohon.
6. Peluang suatu kejadian K adalah hasil bagi banyaknya kemungkinan kejadian K terjadi dengan banyaknya anggota ruang contoh dari suatu percobaan, dirumuskan: $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$, dimana $n(K)$ adalah banyaknya kejadian K yang terjadi dan $n(S)$ adalah banyak anggota ruang contoh suatu percobaan.
7. Peluang sebuah kejadian K tepat berada diantara nol dan satu, ditulis dengan: $0 \leq P(K) \leq 1$. Artinya jika peluang sebuah kejadian K adalah 0 maka kejadian K tidak terjadi, sedangkan jika peluang kejadian K adalah 1 maka kejadian K pasti terjadi.
8. Jika K merupakan sebuah kejadian, maka kejadian yang berada di luar K adalah seluruh kejadian yang tidak terdaftar di K , disebut komplemen dari kejadian K , disimbolkan dengan K^c .
9. Jika K suatu kejadian dalam sebuah percobaan, maka jumlah nilai peluang kejadian K dan nilai peluang kejadian komplemen K adalah 1, ditulis $P(K) + P(K^c) = 1$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar peluang secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Daftar Pustaka

- Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education)*. United States of America: RAND.
- Checkley, Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7–12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).
- Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.
- Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium)*. United States of America: the national academy of sciences.
- Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.
- Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.
- Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Concepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.
- Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.
- Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Massachusetts: Allyn and Bacon Publishers.
- Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

- Soejadi, R. (2004). *Pembelajaran Matematika Realistik. Makalah*. Surabaya: Unesa.
- Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.
- Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For The International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.
- Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.
- Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally)*. United States of America: Allyn & Bacon.
- Kangiran Marthen. (2010). *Matematika*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, 2011.
- Siswanto, dkk. (2009). *Matematika Inovatif*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Depdiknas, 2009.
- Ayu Kurniasih, Diah. (2009). *Matematika ke 2*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Depdikinas.
- Sordijanto, Nugroho, dkk. (2009). *Matematika XI IPA*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.