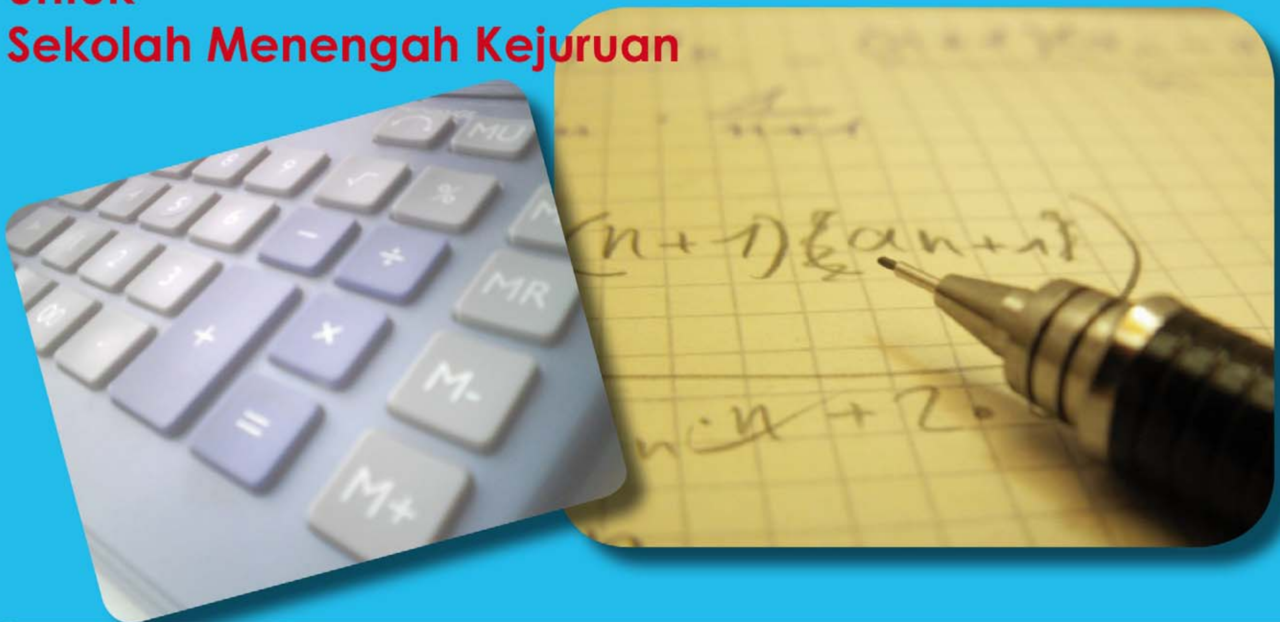
JILID 1

Bandung Arry S., dkk.

# Matematika SMK Bisnis dan Manajemen

untuk
Sekolah Menengah Kejuruan



Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional

Bandung Arry S., dkk.
TEKNIK OTOMASI INDUSTRI JILID 1
untuk SMK

Bandung Arry Sanjoyo dkk

# MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

## SMK

## JILID 1

**Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan**
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional

# MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

Untuk SMK

## JILID 1

Penulis : Bandung Arry Sanjoyo
Sri Suprapti
Nur Asyiah
Dian Winda S

Editor : Erna Apriliani

Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

SAN m

SANJOYO, Bandung Arry
Matematika Bisnis dan Manajemen untuk SMK Jilid 1 /oleh Bandung Arry Sanjoyo, Sri Suprapti, Nur Asyiah, Dian Winda S ---- Jakarta : Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan, Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
xii, 218 hlm
ISBN : 978-602-8320-73-3
ISBN : 978-602-8320-74-0

Diterbitkan oleh
**Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan**
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

# KATA SAMBUTAN

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional, telah melaksanakan kegiatan penulisan buku kejuruan sebagai bentuk dari kegiatan pembelian hak cipta buku teks pelajaran kejuruan bagi siswa SMK. Karena buku-buku pelajaran kejuruan sangat sulit di dapatkan di pasaran.

Buku teks pelajaran ini telah melalui proses penilaian oleh Badan Standar Nasional Pendidikan sebagai buku teks pelajaran untuk SMK dan telah dinyatakan memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada seluruh penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik SMK.

Buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Dengan ditayangkan *soft copy* ini diharapkan akan lebih memudahkan bagi masyarakat khsusnya para pendidik dan peserta didik SMK di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada d luar negeri untuk mengakses dan memanfaatkannya sebagai sumber belajar.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan semoga dapat memanfaatkan buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 17 Agustus 2008
Direktur Pembinaan SMK

# KATA PENGANTAR

Matematika merupakan suatu alat untuk berkomunikasi di bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dengan matematika kita dapat mengungkapkan gejala – gejala alam, sosial, dan teknik dengan suatu ungkapan rumusan matematika yang tidak memuat makna ganda. Bahkan dengan berbantuan matematika kita dapat menyelesaikan permasalahan sosial, ekonomi, manajemen, dan teknik dengan penyelesaian yang akurat dan optimal. Fakta menunjukkan bahwa beberapa pemenang nobel untuk bidang ekonomi atau teknik berasal dari matematikawan.

Oleh karena itu, mempelajari dan menguasai matematika dari usia sekolah dasar maupun lanjut merupakan suatu kebutuhan. Buku ini disusun dengan memperhatikan konsep berfikir matematis dan selalu mengaitkannya dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada permasalahan ekonomi, bisnis, dan manajemen. Pada setiap konsep kecil yang dituangkan dalam suatu sub bab selalu dikaitkan dengan permasalahan sehari – hari. Juga pada setiap bab diawali dengan kalimat motivasi, pembuka dan perangsang bagi pembaca untuk mengerti dari awal, kira-kira akan dipakai seperti apa dan dimana.

Belajar matematika tidak cukup hanya dengan mengerti konsep saja. Harus disertai dengan banyak latihan olah pikir serupa dengan contoh – contoh yang diberikan. Untuk itu, pada setiap akhir sub bab diberikan banyak soal – soal sebagai latihan dalam menguasai konsep dan miningkatkan ketrampilan olah pikir dan penyelesaian permasalahan.

Susunan materi di buku ini berpedoman pada silabus dan GBPP yang telah disusun oleh Depdiknas untuk matematika tingkat SMK bidang Bisnis dan Perkantoran. Sehingga rujukan yang dipakai banyak menggunakan buku matematika untuk SMK dan SMA/MA. Namun demikian juga memperhatikan beberapa buku matematika untuk perguruan tinggi maupun buku aplikasi matematika. Dengan harapan bahwa konsep dan aplikasi matematika tidak terabaikan, juga tingkatan penyampaian materi sangat memperhatikan usia sekolah SMK.

Banyak kata motivasi dan kalimat definitif diambil dari buku rujukan yang dipakai. Untuk suatu topik gagasan, sering diambil dari gabungan beberapa buku yang kemudian diungkapkan kedalam suatu kalimat yang sekiranya akan mudah dimengerti oleh siswa SMK.

Penulis sangat menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran untuk perbaikan sangat diharapkan oleh penulis.

Penulis.

# DAFTAR ISI

Halaman



# JILID 1

# JILID 2

# JILID 3

Bab

1

# SISTEM BILANGAN REAL

Bilangan real mempunyai banyak pemakaian, misal setengah keuntungan usaha Anton tahun 2007 digunakan untuk menambah modal usaha. Jika keuntungan usaha Anton pada tahun 2007 adalah Rp 100.000.000, maka modal usaha Anton pada tahun 2007 bertambah sebesar $\frac{1}{2} \times \text{Rp } 100.000.000 = \text{Rp } 50.000.000$. Penambahan modal usaha Anton tersebut, juga dapat dinyatakan dalam bentuk persen (%), yaitu 50% dari keuntungan pada tahun 2007. Besarnya kerugian suatu usaha juga dapat dinyatakan dengan menggunakan bilangan real negatif. Pada bab ini akan dipelajari tentang bilangan real dan operasi yang dapat dilakukan pada bilangan real.

Operasi-operasi yang berlaku pada bilangan real tersebut meliputi: operasi pada bilangan bulat dan pecahan, operasi pada bilangan berpangkat, menerapkan operasi pada bilangan irrasional (bentuk akar), operasi pada logaritma. Selain itu, juga dibahas konversi bilangan-bilangan bulat dan bilangan pecahan ke atau dari bentuk persen, pecahan desimal, pecahan campuran. Pada bab ini juga dibahas masalah perbandingan, skala, dan persen.

## 1.1 BILANGAN REAL DAN OPERASI PADA REAL

### 1.1.1 BILANGAN REAL

Sistem bilangan merupakan dasar matematika. Oleh karena itu, sangatlah penting untuk mengenal berbagai jenis bilangan dan perbedaan di antara bilangan-bilangan tersebut. Dalam sub-bab ini akan dikenalkan mengenai dasar dan istilah yang berkaitan dengan bilangan asli, cacah, bulat, rasional, irrasional, dan real.

**Bilangan Asli**

Dalam keseharian, biasanya orang membilang mulai dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan seterusnya. Bilangan – bilangan ini dinamakan ***bilangan asli***.

Himpunan ***bilangan asli (natural)*** biasa dilambangkan dengan N, adalah suatu himpunan yang anggotanya bilangan asli, seperti dituliskan berikut ini.

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }

**Bilangan Cacah**

Jika bilangan 0 dimasukkan dalam himpunan bilangan asli, maka himpunan tersebut dinamakan himpunan ***bilangan cacah***, dan dilambangkan dengan H, yaitu:

H = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }

Setiap bilangan asli juga merupakan bilangan cacah, akan tetapi bukan sebaliknya.

CONTOH 1.1.1

- Bilangan 7 adalah bilangan asli dan 7 juga merupakan bilangan cacah.
- Bilangan 4 adalah bilangan asli dan 4 juga merupakan bilangan cacah.

- Bilangan 0 merupakan bilangan cacah akan tetapi 0 bukan merupakan bilangan asli.

### Bilangan Bulat

Bilangan asli 7 dapat juga dituliskan dengan memberikan tanda + didepannya menjadi +7. Jadi bilangan 7 dan +7 adalah sama. Namun demikian, tanda + tidak biasa dituliskan. Dalam perhitungan banyaknya suatu objek, sering dijumpai adanya kekurangan objek. Misal jumlah apel dalam suatu kardus seharusnya 100 buah apel, ternyata setelah dilakukan penghitungan banyaknya apel ada 97 buah. Jadi ada kekurangan buah apel sebanyak 3 buah. Untuk menyatakan kekurangan 3 buah apel ini dapat dituliskan dengan symbol -3 buah apel.

Selanjutnya didefiniskan suatu bilangan negatif $-n$ dengan $n$ adalah bilangan asli. Himpunan bilangan yang dinotasikan dengan lambang Z dan mempunyai anggota seperti berikut ini dinamakan ***himpunan bilangan bulat*** **(*integer*).**

$$Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Setiap bilangan cacah juga merupakan bilangan bulat, akan tetapi bukan sebaliknya. Himpunan bilangan asli merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan cacah, begitu juga himpunan bilangan cacah merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan bulat.

CONTOH 1.1.2

- Bilangan 7 adalah bilangan cacah dan 7 juga merupakan bilangan bulat.
- Bilangan 0 adalah bilangan cacah dan 0 juga merupakan bilangan bulat.
- Bilangan -7 merupakan bilangan bulat akan tetapi -7 bukan merupakan bilangan cacah.

Jadi bilangan bulat terdiri dari:

- ✓ Bilangan bulat positif, yaitu: 1, 2, 3, ...
- ✓ Bilangan bulat 0 (nol), dan
- ✓ Bilangan bulat negatif, yaitu: -1, -2, -3, ...

**Bilangan Rasional**

Himpunan ***bilangan rasional***, dinotasikan dengan lambang *Q*. Bilangan rasional berbentuk pembagian bilangan bulat $\frac{p}{q}$ dengan *p* disebut pembilang (*numerator*) dan $q \neq 0$ disebut penyebut (*denominator*). Karena itu, himpunan bilangan rasional dapat dituliskan sebagai berikut.

$$Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z \; dan \; q \neq 0\right\}$$

CONTOH 1.1.3

Berikut ini merupakan contoh-contoh bilangan rasional:

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ adalah bilangan rasional yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a < b$. Bentuk bilangan rasional seperti ini disebut *pecahan murni*.
- $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, $\frac{21}{5}$ adalah bilangan rasional yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a > b$. Bentuk bilangan rasional seperti ini disebut *pecahan tak murni*.

Perhatikan bahwa setiap bilangan bulat juga merupakan bilangan rasional karena setiap bilangan bulat *p* dapat ditulis sebagai pembagian $\frac{p}{1}$. Bilangan rasional mempunyai tak berhingga banyak bentuk representasi bilangan. Seperti bilangan rasional 1 dapat dituliskan dengan $\frac{2}{2}$, atau $\frac{3}{3}$, atau $\frac{4}{4}$, atau yang lainnya. bilangan rasional $\frac{3}{4}$ dapat dituliskan dengan $\frac{6}{8}$, atau $\frac{9}{12}$, atau $\frac{12}{16}$, atau yang lainnya.

**Sifat bilangan rasional:**

Nilai dari suatu bilangan rasional $\frac{p}{q}$ tidak berubah, jika pembilang *p* dan penyebut *q* keduanya dikalikan atau dibagai dengan bilangan bulat selain 0.

## Bentuk Desimal

Bilangan rasional $\frac{p}{q}$ dapat dituliskan dalam bentuk desimal $d_1 d_2 \ldots d_n, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+m}$. Untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n+m$, $d_i$ merupakan angka / digit desimal 0, 1, 2, …, atau 9. Nilai dari bilangan bentuk desimal $d_1 d_2 \ldots d_n, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+m}$ adalah

$$d_1(10^n)+d2(10^{n-1})+\ldots+d_n(10^0)+d_{n+1}(10^{-1})+d_{n+2}(10^{-2})+\ldots d_{n+m}(10^m)$$

dengan :

- $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, dan seterusnya.
- $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, dan seterusnya
- Sedangkan $10^0$ didefinisikan dengan $10^0 = 1$.

Sebagai gambaran bilangan 235,47 mempunyai nilai

$$2(10^3) + 3(10^2) + 5(10^1) + 4(10^{-1}) + 7(10^{-2})$$

CONTOH 1.1.4

Berikut ini merupakan contoh-contoh bentuk desimal dari bilangan rasional:

- $\frac{1}{2} = 0{,}5$ , nilai 0,5 didapat dari membagi bilangan 1 dengan bilangan 2.
- $\frac{1}{4} = 0{,}25$ , nilai 0,25 didapat dari membagi bilangan 1 dengan bilangan 4.
- $\frac{15}{2} = 7{,}5$ , nilai 7,5 didapat dari membagi bilangan 15 dengan bilangan 2.
- $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ , tanda … menyatakan angka perulangan 3 diulang terus sampai dengan tak berhingga banyak. Bentuk 0,33333… ini sering disingkat dengan $0,\overline{3}$.
- $\frac{25}{99} = 0{,}2525\ldots$ , tanda … menyatakan angka perulangan 25 diulang terus sampai dengan tak berhingga banyak. Bentuk 0,252525… ini sering disingkat dengan $0,\overline{25}$.

Dengan memperhatikan contoh di atas, dapat dikatakan bahwa:

1. Ada bilangan rasional yang dapat dinyatakan dalam **bentuk desimal terbatas**, seperti bilangan 0,5 ; 0,25 ; 0,125 dan lainnya.
2. Ada bilangan rasional yang dapat dinyatakan dalam **bentuk desimal tak terbatas**, seperti:
   a. Bilangan 0,3333… angka 3 dibelakang tanda koma berulang tak terbatas.
   b. Bilangan 0,125125125125… angka 125 dibelakang tanda koma berulang tak terbatas.

## CONTOH 1.1.5

Nyatakan bilangan rasional desimal berikut ini ke dalam bentuk pembagian dua bilangan bulat $\frac{p}{q}$.

a. 2,3 b. 23,45

***Penyelesaian:***

a. Dimisalkan bilangan rasional yang dicari adalah *x.*
   Jadi $x = 2{,}3$
   Kalikan kedua ruas dari persamaan dengan 10. Kita ambil pengali 10 karena angka dibelakang tanda koma terbatas satu angka. Lanjutkan dengan operasi aljabar, didapat hasil berikut ini.
   $10\ x = 23$, atau
   $x = \frac{23}{10}$
b. Dimisalkan bilangan rasional yang dicari adalah *x.*
   Jadi $x = 23{,}45$
   Kalikan kedua ruas dari persamaan dengan 100. Kita ambil pengali 100 karena angka dibelakang tanda koma terbatas dua angka. Lanjutkan dengan operasi aljabar, didapat hasil berikut ini.
   $100\ x = 2345$, atau
   $x = \frac{2345}{100}$

## CONTOH 1.1.6

Nyatakan bilangan rasional desimal berikut ini ke dalam bentuk pembagian dua bilangan bulat $\frac{p}{q}$.

a. 1,33333… b. 0,123123123…

***Penyelesaian:***

a. Dimisalkan bilangan rasional yang dicari adalah *x.*

   Jadi $x$ = 1,33333…

   Kalikan kedua ruas dari persamaan dengan 10, kita ambil pengali 10 karena angka dibelakang tanda koma tak terbatas dan hanya satu angka yang berulang, yaitu 3. Lanjutkan dengan operasi aljabar, didapat hasil berikut ini.

   $10\,x = 13{,}33333\ldots$

   $10\,x = 12 + 1{,}33333\ldots$

   $10\,x = 12 + x$

   $9\,x = 12$

   $x = \frac{12}{9}$

b. Dimisalkan bilangan rasional yang dicari adalah *x.*

   Jadi $x$ = 0,123123123…

   Kalikan kedua ruas dari persamaan dengan 1000, kita ambil pengali 1000 karena angka dibelakang tanda koma tak terbatas dan hanya tiga angka yang berulang, yaitu 123. Lanjutkan dengan operasi aljabar, didapat hasil berikut ini.

   $1000\,x = 123{,}123123123\ldots$

   $1000\,x = 123 + 0{,}123123123\ldots$

   $1000\,x = 123 + x$

   $999\,x = 123$

   $x = \frac{123}{999}$

Langkah-langkah berikut merubah bilangan rasional berbentuk desimal $d_1 d_2 \ldots d_n, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+m}$ menjadi bilangan rasional berbentuk $\frac{p}{q}$.

1. Lakukan pemisalan bilangan rasional yang dicari adalah $x = d_1 d_2 \ldots d_n, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+m}$.

2. Jika $m$ berhingga / terbatas, maka kalikan kedua ruas persamaan pada langkah 1 dengan bilangan $10^m$.

   Jika $m$ tak berhingga / tak terbatas, maka kalikan kedua ruas persamaan pada langkah 1 dengan bilangan $10^r$, dengan $r$ adalah banyaknya digit yang berulang pada deretan digit $d_{n+1}d_{n+2}\ldots d_{n+m}$.
3. Lakukan operasi aljabar untuk membawa $x$ kedalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan $p$ dan $q\neq 0$ bilangan bulat.

Bilangan desimal yang mempunyai angka dibelakang tanda koma tak terbatas dan tak berulang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian bilangan bulat $\frac{p}{q}$. Seperti bilangan desimal $x$=3,0100100010000100000010000001… tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian bilangan bulat. Oleh karena itu bilangan $x$ tersebut bukan bilangan rasional, atau $x$ merupakan bilangan irrasional.

- **Bilangan Irrasional**

***Bilangan irrasional*** atau bilangan bukan rasional yaitu bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pembagian bilangan bulat.

CONTOH 1.1.7

Bilangan $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional. Ini dapat dibuktikan secara analitis, namun tidak ditunjukkan disini. Akan tetapi, $\sqrt{2}$ akan ditampilkan dalam bentuk desimal yang diambil dengan menggunakan perangkat lunak Maple. Amatilah bahwa angka-angka dibelakang tanda koma pada bilangan $\sqrt{2}$ tidak ada yang berulang.

- $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801688724210$, nilai desimal $\sqrt{2}$ yang dipotong sampai dengan 30 angka dibelakang tanda koma.
- $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569$ $67187537694807317667973799073247846210704$, nilai desimal $\sqrt{2}$ yang dipotong sampai dengan 80 angka dibelakang tanda koma. Simbul $\approx$ adalah simbul "hampir sama dengan".

## CONTOH 1.1.8

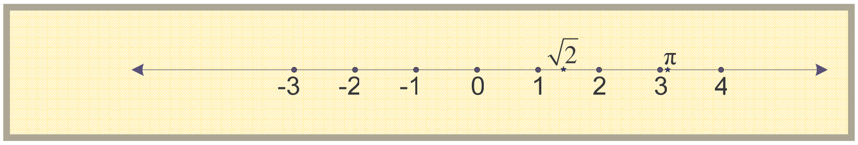
Amatilah bahwa angka-angka dibelakang tanda koma pada bilangan $\pi$ yang diambil dengan menggunakan perangkat lunak Maple, tidak ada sederetan angka yang berulang.

- $\pi = 3{,}141592653589793238462643383280$, nilai desimal $\pi$ yang dipotong sampai dengan 20 angka dibelakang tanda koma.
- $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716$ $939937510582097494459230781640628620900$, nilai desimal $\pi$ yang dipotong sampai dengan 80 angka dibelakang tanda koma.

### Bilangan Real

Gabungan himpunan bilangan rasional dan irrasional membentuk suatu himpunan bilangan yang disebut himpunan ***bilangan real*** dan dinotasikan dengan R.

Bilangan real dapat dikaitkan dengan titik pada sebuah garis. Garis ini mempunyai arah ke kanan dan ke kiri. Dipilih sebuah titik acuan *0* pada garis tersebut, yang disebut ***titik awal.*** Titik acuan awal ini yang berkaitan dengan bilangan real 0. Dari titik acuan 0, garis arah ke kanan sebagai ***arah positif*** dan titik pada garis arah positif ini menyatakan sebuah bilangan real positif. Dari titik acuan 0 ke arah kiri sebagai ***arah negatif*** dan titik pada garis arah negatif ini menyatakan sebuah bilangan real negatif. Lihat Gambar 1.1.1 dibawah ini.

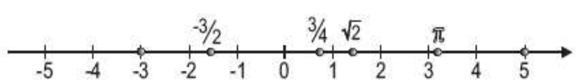



Gambar 1.1.1. Garis Bilangan Real [1]

Dengan sembarang satuan pengukuran, setiap bilangan real positif *x*
Dengan sembarang satuan pengukuran, setiap bilangan real positif *x*
dinyatakan dengan suatu titik yang berjarak *x* satuan ke arah kanan dari titik awal, dan setiap bilangan real negatif –*x* dinyatakan dengan titik yang berjarak *x* satuan ke arah kiri dari titik awal.

## CONTOH 1.1.9

Perhatikan Gambar 1.1.2, pada garis bilangan real diberi tanda tempat titik-titik dengan koordinat $-\frac{3}{2}, \sqrt{2}, \text{dan } \pi.$ Tempat dari $\sqrt{2}$ dan π merupakan hampiran yang diperoleh dari hampiran desimalnya yaitu $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ dan $\pi \approx 3{,}14$.




Gambar 1.1.2 Posisi beberapa bilangan real pada garis bilangan

---

[1] Pada tahun 1637 Ren´e Descartes1 menerbitkan suatu karya filsafat yang berjudul *Discourse on the Method of Rightly Conducting the Reason*. Dalam lampiran tersebut Ren´e Descartes menghubungkan aljabar dengan geometri, yang merupakan kreasi baru dan disebut ***geometri analitik***; suatu cara untuk menjelaskan rumus aljabar dengan kurva geometrik dan sebaliknya, kurva geometrik dengan rumus aljabar. Dalam geometri analitik, bilangan real dinyatakan dengan titik pada sebuah garis.

Berdasarkan cara di atas, bilangan-bilangan real dan titik-titik pada garis koordinat adalah berhubungan. Setiap bilangan real akan dikawankan dengan satu titik tunggal dan setiap titik akan dikawankan dengan satu bilangan real. Oleh karena itu, bilangan real dan titik-titik pada garis koordinat ***berkorespondensi satu-satu***.

Bilangan real dapat diurut berdasarkan nilai desimalnya. Bilangan real $\sqrt{2}$ lebih besar dari bilangan real $\frac{7}{5}$. Karena $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ > $\frac{7}{5}$ =1,4. Bilangan real $\sqrt{2}$ lebih kecil dari bilangan real $\frac{3}{2}$. Karena $\sqrt{2} \approx 1{,}142$ < $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

□ **Bilangan Kompleks**

Kuadrat suatu bilangan real selalu tak negatif. Oleh karena itu persamaan $x^2 = -1$ tidak mempunyai penyelesaian dalam bentuk bilangan real. Pada abad XVIII para matematikawan memperbaiki permasalahan tersebut dengan memperkenalkan bilangan baru, yang dinotasikan dengan $i$ dan didefinisikan sebagai $i^2 = -1$. Definisi ini selanjutnya mengarah pada perkembangan ***bilangan kompleks***, yaitu bilangan-bilangan yang berbentuk

$$a + bi$$

dengan *a* dan *b* bilangan real. Bilangan – bilangan kompleks ini, jika dihimpun membentuk sebuah himpunan bilangan kompleks yang biasa dinotasikan dengan *C* dan dinyatakan sebagai:

$C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$

## CONTOH 1.1.10

Beberapa contoh bilangan kompleks, sebagai berikut.

a. 1-2$i$ = $1 - \sqrt{-1}$ dengan $a$ = 1 dan $b$ = -2.

b. 2+$i$ = $2 + \sqrt{-1}$ dengan $a$ = 2 dan $b$ = 1.

c. -5+10$i$ = $-5 + 10\sqrt{-1}$ dengan $a$ = -5 dan $b$ = 10.

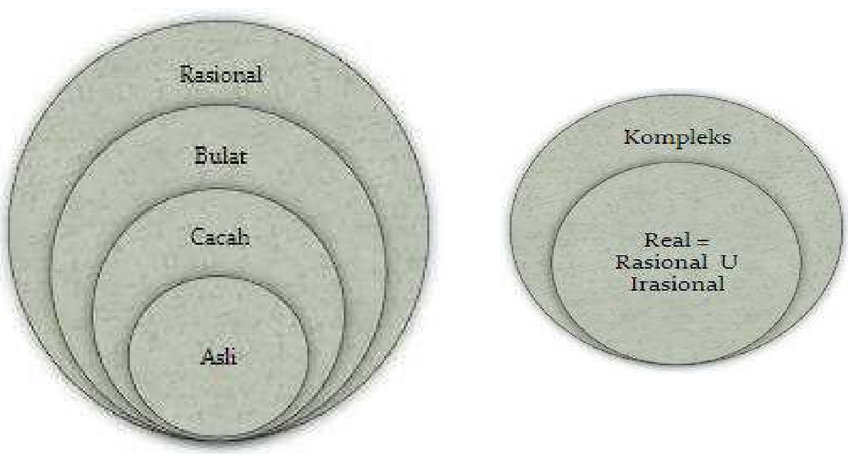
d. -5 =-5 + 0$i$ dengan $a$ = -5 dan $b$ = 0.

e. 10$i$ = 0 + 10$i$ dengan $a$ = 0 dan $b$ = 10.

Perhatikan bahwa setiap bilangan real $a$ juga merupakan bilangan kompleks karena dapat ditulis sebagai $a$ = $a$ + 0$i$. Jadi, himpunan bilangan real adalah himpunan bagian dari bilangan kompleks. Bilangan kompleks yang bukan bilangan real disebut ***bilangan imajiner***. Jadi

bilangan imajiner berbentuk *bi,* dengan $b \in R$

Susunan bilangan-bilangan dapat diringkas dalam gambar berikut ini




Gambar 1.1.3 Diagram Himpunan Bilangan

Pada buku ini, bilangan kompleks hanya ditampilkan sebagai perkenalan, dan tidak akan dibahas lebih mendalam.

### 1.1.2 OPERASI PADA BILANGAN REAL

Sebelum ini, kita telah dikenalkan dengan jenis bilangan, yaitu bilangan asli, cacah, bulat, rasional, irrasional, real, dan kompleks. Untuk selanjutnya, bilangan yang akan dibahas adalah bilangan real. Pada sub bab ini akan diperkenalkan operator dan sifat-sifat operasi dasar pada bilangan real. Beberapa operator yang dapat dikenakan pada bilangan real adalah *penjumlahan, pengurangan, perkalian,*dan *pembagian*.

1. **Operasi Penjumlahan (+)**

   Jika $a$, $b$ merupakan bilangan real atau $a, b \in R$ maka hasil penjumlahan antara $a$ dan $b$ adalah bilangan real $c$ dan ditulis $c = a + b$.

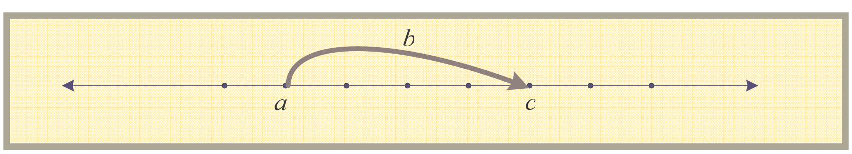
   **Cara mendapatkan hasil penjumlahan secara geometris**

   - Letakkan bilangan pertama $a$ pada garis bilangan.
   - Untuk $b > 0$, langkahkan **ke kanan** sejauh (sebanyak) bilangan kedua $b$.

     Untuk $b < 0$, langkahkan **ke kiri** sejauh bilangan $-b$.

     Untuk $b=0$, $a+b=a$.

   Langkah – langkah di atas, untuk $b$ positif dapat digambarkan sebagai berikut.




Gambar 1.1.4 Representasi geometris dari $c = a + b$

**Sifat operasi penjumlahan**

Untuk bilangan real *a, b,* dan *c,* berlaku sifat-sifat operasi penjumlahan sebagai berikut.

i. Sifat tertutup

Penjumlahan dua buah bilangan real menghasilkan bilangan real juga.

ii. Sifat komutatif

$a + b = b + a$

iii. Sifat asosiatif

$(a + b) + c = a + (b + c)$

iv. Adanya elemen identitas/netral

$a + 0 = 0 + a = a$

Bilangan 0 dinamakan *elemen identitas* untuk penjumlahan.

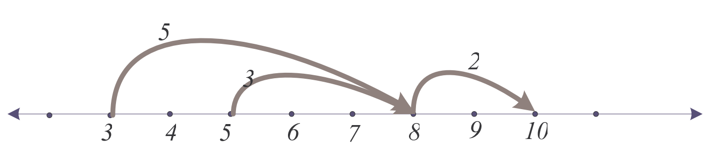
v. Adanya elemen invers

$a + (-a) = 0$ , bilangan $-a$ dikatakan *invers penjumlahan* dari *a.*

CONTOH 1.1.11

Tentukan hasil 5 + 3 dan 3 + 5 + 2 dengan menggambarkan secara geometris.

Penyelesaian:




Berdasarkan gambar di atas:

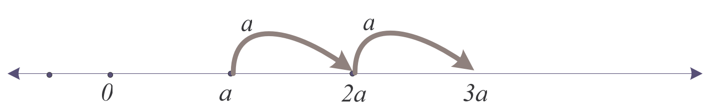
- Hasil dari 5 + 3 adalah 8.
- Hasil dari 3 + 5 + 2 = (3+5)+2 = 8 + 2 = 10

Lakukan sendiri untuk menjumlahkan 3 + 5 dan 5 + (3 + 2). Perhatikan bahwa sifat-sifat tertutup, komutatif dan assosiatif terlihat pada contoh ini.

## CONTOH 1.1.12

Tentukan hasil $a + a$ dan $a + a + a$ dengan menggambarkan secara geometris. Dengan $a > 0$.

Penyelesaian:




Berdasarkan gambar di atas:

- Hasil dari $a + a$ adalah $2a$.
- Hasil dari $\boldsymbol{a} + a + a = (a + a)+a = 2a + a = 3a$

2. **Operasi Pengurangan (-)**

   Jika $a,b\in R$ maka hasil pengurangan / selisih antara $a$ dan $b$ adalah bilangan real $c$ dan ditulis $c = a - b = a + (-b)$.

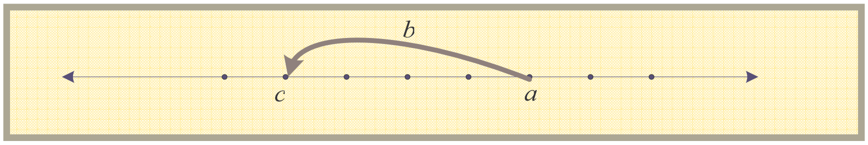
   **Cara mendapatkan hasil pengurangan secara geometris**

- Letakkan bilangan pertama $a$ pada garis bilangan.
- Untuk $b > 0$, langkahkan **ke kiri** sejauh (sebanyak) bilangan kedua $b$.

  Untuk $b < 0$, langkahkan **ke kanan** sejauh bilangan $-b$.

  Untuk $b$=0, $a$-$b$=$a$.

Langkah – langkah di atas (untuk nilai $b > 0$) dapat digambarkan sebagai berikut.




Gambar 1.1.5 Representasi geometris dari $c = a - b = a + (-b)$

**Sifat operasi pengurangan**

Untuk bilangan real *a, b,* dan *c,* berlaku sifat-sifat operasi pengurangan sebagai berikut.

i. Sifat tertutup

Pengurangan dua buah bilangan real menghasilkan bilangan real juga.

ii. Sifat tidak komutatif

Jika $a \neq b$, maka $a - b \neq b - a$

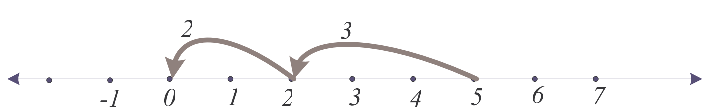
iii. Sifat tidak asosiatif

Jika $c \neq 0$, maka $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

## CONTOH 1.1.13

Tentukan hasil 5 - 3 dan 5 - 3 - 2 dengan menggambarkan secara geometris.

Penyelesaian:



Berdasarkan gambar di atas:

- Hasil dari 5 - 3 adalah 2.
- Hasil dari 5 - 3 - 2 = (5-3)-2 = 2 + 2 = 0

Lakukan sendiri untuk menghitung 3 - 5 dan 5 - (3 - 2).

**3. Operasi Perkalian (× atau ·)**

Jika $a,b \in R$ maka hasil perkalian antara $a$ dan $b$ adalah bilangan real $c$ dan ditulis $c = a \times b = a \cdot b = ab$ .

**Cara mendapatkan hasil perkalian a dan b.**

i. Jika $a$ merupakan bilangan bulat maka

$$a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}$$

Banyaknya suku *b* ada *a* suku

ii. Jika $a = \frac{p}{q}$ dan $b = \frac{r}{s}$ keduanya rasional, maka

$$a \times b = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

**Sifat operasi perkalian**

Untuk bilangan real *a, b,* dan *c,* berlaku sifat-sifat operasi perkalian sebagai berikut.

i. Sifat tertutup

Perkalian dua buah bilangan real menghasilkan bilangan real juga.

ii. Sifat komutatif

$a\,b = b\,a$

iii. Sifat asosiatif

$(a\,b)c = a\,(b\,c)$

iv. Adanya elemen identitas/netral

$a \times 1 = 1 \times a = a$

bilangan 1 dinamakan *elemen identitas* untuk perkalian.

v. Adanya elemen invers

$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$, bilangan $\frac{1}{a}$ dikatakan *invers perkalian* dari *a.*

CONTOH 1.1.14

Tentukan hasil 5 × 3,1 dengan menggunakan definisi di atas.

Penyelesaian:

$5 \times 3{,}1 = 3{,}1 + 3{,}1 + 3{,}1 + 3{,}1 + 3{,}1 = 15{,}5$

CONTOH 1.1.15

Tentukan hasil 1,5 × 2,3 dengan menggunakan definisi di atas.

Penyelesaian:

1,5 dan 2,3 merupakan bilangan rasional. Karena itu, dapat kita gunakan rumusan pada perkalian untuk dua bilangan rasional.

$1{,}5 \times 2{,}3 = \frac{3}{2} \times \frac{23}{10} = \frac{69}{20} = 3{,}45$

**4. Operasi Pembagian (/ atau –)**

Jika $a, b \in R$ dan $b \neq 0$ maka hasil pembagian antara *a* dan *b* adalah bilangan real *c* dan ditulis $c = a/b = \frac{a}{b}$

**Cara mendapatkan hasil pembagian a dan b.**

Jika $a = \frac{p}{q}$ dan $b = \frac{r}{s}$ keduanya rasional maka

$$a \times b = \frac{p}{q} / \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r}$$

dengan $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ , dan $p, q, r, s$ adalah bilangan bulat

**Sifat operasi pembagian**

Untuk bilangan real *a, b,* dan *c,* berlaku sifat-sifat operasi pembagian sebagai berikut.

i. Sifat tertutup

   Pembagian dua buah bilangan real dengan penyebut tidak nol menghasilkan bilangan real.

ii. Sifat tidak komutatif

   Jika $a \neq 0, b \neq 0$, dan $a \neq b$ maka $a/b \neq b/a$

iii. Sifat tidak asosiatif

   Jika *a, b, c* tidak nol, $a \neq b$, dan $c \neq 1$ maka $(a/b)/c \neq a/(b/c)$

## CONTOH 1.1.16

Tentukan hasil $\frac{1,5}{2,3}$ dengan menggunakan definisi di atas.

Penyelesaian:

1,5 dan 2,3 merupakan bilangan rasional. Karena itu dapat kita gunakan rumusan pada perkalian untuk dua bilangan rasional.

$1,5 \times 2,3 = \frac{3}{2} / \frac{23}{10} = \frac{3}{2} \times \frac{10}{23} = \frac{30}{46}$

## • RANGKUMAN

- Bilangan real terdiri dari bilangan rasional dan irrasional.
- Bilangan bulat merupakan bagian dari bilangan rasional.
- Bilangan rasional dapat dinyatakan bentuk $\frac{p}{q}$, dengan *p,* dan *q*≠0 adalah bilangan bulat. Bentuk pecahan desimal dari bilangan rasional adalah berulang.
- Operasi yang bekerja pada bilangan real adalah operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

## SOAL LATIHAN 2-1

1. Hitung dan sketsakan pada garis bilangan :
   a. 3 + 6 b. 0 - 7 c. -5 + 9
2. Hitung dan sketsakan pada garis bilangan :
   a. 3 × 4 b. -2 × 3 c. 4 × 3.25
3. Dengan menggunakan definisi operator penjumlahan pada bilangan real, tentukan nilai ekpresi berikut ini.:
   a. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ b. $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$ c. $\frac{-1}{6}+\frac{3}{4}$
4. Dengan menggunakan definisi operator pengurangan pada bilangan real, tentukan nilai ekpresi berikut ini.:
   a. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$ b. $\frac{4}{7}-\frac{3}{7}$ c. $\frac{-1}{6}-\frac{3}{4}$
5. Dengan menggunakan definisi operator penjumlahan pada bilangan real, tentukan nilai ekpresi berikut ini.:
   a. $\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}$ b. $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$ c. $\frac{-1}{6}\times\frac{3}{4}$
6. Dengan menggunakan definisi operator penjumlahan pada bilangan real, tentukan nilai ekpresi berikut ini.:

a. $\frac{1}{5}:\frac{3}{5}$ b. $\frac{4}{7}:\frac{3}{7}$ c. $\frac{-1}{6}:\frac{3}{4}$

7. Nyatakan bilangan rasional berikut ini dalam bentuk pecahan desimal.

   a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{4}{7}$ c. $\frac{-2}{6}$

8. Nyatakan bilangan rasional bentuk pecahan desimal berikut ini dalam bentuk pembagian bilangan bulat.

   a. 0,75 b. 0,7777 ... c. -15,263

## 1.2 PERBANDINGAN, SKALA DAN PERSEN

Kita sering melihat kondisi suatu wilayah atau daerah melalui peta daerah tersebut. Satu Negara dapat kita gambarkan keadaan geografinya dalam sebuah peta kecil dalam selembar kertas. Ukuran panjang jalan 1 *cm* dalam sebuah peta, mewakili beberapa *km* pada panjang jalan aslinya. Pada peta tersebut, biasanya dituliskan perbandingan ukuran panjang dipeta dan panjang aslinya. Perbandingan ini dituliskan dalam skala peta.

Pada sub bab ini, kita akan belajar tentang perbandingan, skala, dan persen yang sangat terkait dengan kehidupan sehari-hari.

### 1.2.1 PERBANDINGAN

Jika kita mengamati dua buah objek, maka kita bisa membandingkan ukuran kedua objek tersebut, misalnya membandingkan tingginya, panjangnya, beratnya dan sebagainya. Untuk membandingkan dua ukuran dapat dinyatakan dengan hasil bagi dari kedua ukuran tersebut. Dengan demikian perbandingan dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan sederhana.

Agar lebih mudah dipahami, perhatikan beberapa ilustrasi berikut:

1. Dede mempunyai 10 buah buku, sedangkan Zaza mempunyai 5 buah. Perbandingan banyaknya buku Dede dan banyaknya buku Zaza adalah 10 : 5 atau 2 : 1.
2. Berat badan Kiki 45 *kg* dan berat badan Boy 72 *kg*. Perbandingan berat badan Kiki dan Boy adalah 45 : 72 atau 5 : 8.
3. Jarak rumah Chacha ke Sekolah 400 *m* sedangkan jarak ke Kantor Pos 2 *km*. Perbandingan jarak ke Sekolah dan jarak ke Kantor Pos dari rumah Chacha adalah 400 : 2000 atau 1 : 5.

Jika perbandingan dua besaran / ukuran sejenis A dan B adalah

$$A : B = x : y \quad \text{atau} \quad \frac{A}{B} = \frac{x}{y}$$

maka pernyataan perbandingan tersebut dapat diartikan sebagai berikut:

- $A = \frac{x}{y}B$ , atau
- $B = \frac{y}{x}A$ , atau
- $x = \frac{A}{B}y$ , atau
- $y = \frac{B}{A}x$

 **Perbandingan Senilai**

Untuk memahami maksud perbandingan senilai, perhatikan ilustrasi dibawah ini:

1. Jika membeli sebuah buku, seseorang harus membayar *x* rupiah, maka untuk membeli *n* buah buku, orang tersebut harus membayar sebanyak *n x* rupiah.

2. Untuk menempuh jarak 50 *km* diperlukan bahan bakar sebanyak 1 liter premium, jika jarak yang harus ditempuh adalah 300 *km*, maka bahan premium yang diperlukan adalah 6 *liter*.

Dari gambaran diatas, makin banyak buku yang akan dibeli, makin banyak pula uang yang harus dikeluarkan. Begitu juga, makin jauh yang harus ditempuh makin banyak premium yang dibutuhkan.

**Perbandingan Berbalik Nilai**

Untuk memahami maksud perbandingan berbalik nilai, perhatikan ilustrasi dibawah ini:

1. Suatu pabrik memproduksi sepatu dengan target sebanyak 100 pasang. Jika dikerjakan oleh seorang saja, maka waktu yang dibutuhkan 100 hari. Jika dikerjakan oleh dua orang, maka waktu yang diperlukan sebanyak 50 hari. Jika dikerjakan oleh empat orang, maka waktu yang diperlukan sebanyak 25 hari. Jika dikerjakan oleh lima orang, maka waktu yang diperlukan sebanyak 20 hari.
2. Untuk menempuh jarak 45 km diperlukan waktu selama 45 menit dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Jika kecepatan rata-rata 80 km/jam, maka waktu yang dibutuhkan sebanyak 33,75 menit. Begitu juga, jika kecepatan rata-rata 70 km/jam, maka waktu yang diperlukan adalah 38,57 menit.

Dari contoh di atas, bahwa makin banyak pegawai yang ikut mengerjakan makin sedikit hari yang dibutuhkan. Begitu juga, dengan menambah kecepatan rata-rata yang diperlukan, waktu yang dibutuhkan makin sedikit.

## CONTOH 1.2.1

Lapangan sepak bola mempunyai ukuran panjang 110 m dan lebar 60 m lebar. Carilah perbandingan antaran panjang dan lebar dari lapangan sepak bola.

Penyelesaian:

Panjang : Lebar = 110 m : 60 m
= 110 : 60
= 11 : 6

## CONTOH 1.2.2

Seseorang mengatakan bahwa harga bahan bakar minyak premium pada awal tahun 2007 ini mencapai lima kali lipat dari harga premium tujuh tahun yang lalu. Jika pada awal tahun 2007 harga premium adalah Rp 5000, maka berapakah harga premium pada awal 2000?.

Penyelesaian:

Misal harga premium awal tahun 2007 adalah *x* dan harga premium awal tahun 2000 adalah *y*.

Perbandingan antara *x* dan *y* adalah 5 : 1. Atau

$x : y = 5 : 1$ yang berarti $y = \frac{1}{5}x = \frac{1}{5} \times Rp\,5.000 = Rp\,1.000$

Jadi harga premium di awal 2000 adalah Rp 1.000.

## 1.2.2 SKALA

Dalam pelajaran Geografi sering diminta untuk menentukan letak suatu pulau, sungai, kota, dan gunung pada suatu wilayah tertentu. Untuk melukiskan keseluruhan area dalam tempat tertentu pasti tidak memungkinkan. Karena itu perlu penskalaan atau perbandingan yang dapat mewakili tempat-tempat tersebut. Gambaran yang dibuat sebanding dengan aslinya tetapi dengan ukuran yang lebih kecil dinamakan penskalaan. Misalnya gedung, skala antara gedung sebenarnya dengan miniaturnya adalah 1:100. Jika pada miniatur berjarak 1 *cm*, maka jarak pada gedung aslinya adalah $1 cm \times 100 = 100 cm = 1 m$.

Skala biasanya digunakan untuk perbandingan ukuran pada peta (*miniature*, *blue print*) dibandingkan dengan ukuran sebenarnya. Atau

$$Ukuran\ gambar : Ukuran\ objek\ sebenarnya$$

CONTOH 1.2.3

Suatu peta pulau Jawa mempunyai skala 1 : 2.000.000. Pada peta tersebut jarak antara Jakarta Pusat ke Bandung terukur 10 *cm*, tentukan jarak sebenarnya?

Penyelesaian:

Diketahui skala = 1 : 2.000.000

Jarak sebenarnya = $\frac{10\ cm}{1/2.000.000} = 20.000.000\ cm = 200\ km.$

### 1.2.3 PERSEN

Istilah persen sering kita jumpai dalam keseharian. Potongan harga barang – barang yang dijual oleh suatu toko, biasanya dinyatakan dalam persen (%). Kenaikan harga juga dapat dinyatakan dalam persen. Apa itu maksud dari persen? Akan dibahas dalam subbab ini.

Perbandingan suatu bilangan dengan bilangan 100 disebut dengan ***persen* (%)**. Dengan kata lain pecahan dengan penyebut 100, ditulis dengan %. Perbandingan antara 15 dengan 100 atau ditulis dalam bentuk pecahan adalah $\frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\%$.

Setiap bilangan real dalam bentuk desimal dapat dinyatakan dalam persen, yaitu dengan cara mengalikan bilangan tersebut dengan 100 dan diikuti dengan tanda %. Sebagai contoh, bilangan 0,025 dapat ditulis dalam bentuk persen 0,025=0,025 × 100% = 2,5%.

Sebaliknya, setiap bilangan persen dapat dinyatakan dalam bentuk real desimal, yaitu dengan cara membagi bilangan persen dengan 100. Sebagai contoh, bilangan 800% dapat ditulis dalam bentuk desimal menjadi $800\% = \frac{800}{100} = 8$.

**CONTOH 1.2.4**

Nyatakan pecahan berikut ini menjadi bentuk persen.

a. $\frac{7}{10}$ b. $\frac{17}{25}$ c. $\frac{30}{70}$

Penyelesaian:

a. $\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \times 100\% = 70\ \%$ atau $\frac{7}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$

b. $\frac{17}{25} \times 100\% = 17 \times 4\% = 68\%$ atau $\frac{17}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{68}{100} = 68\,\%$

c. $\frac{30}{70} \times \frac{100/70}{100/70} = \frac{300/7}{100} = \frac{42{,}857}{100} = 42{,}857\ \%$

## CONTOH 1.2.5

Nyatakan bilangan persen berikut ini menjadi bentuk desimal atau pecahan.

a. 50% b. 75,5% c. $4\frac{1}{2}\%$

Penyelesaian:

a. $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b. $75{,}5\% = \frac{75{,}5}{100} = \frac{755}{1000} = 0{,}75$

c. $4\frac{1}{2}\% = \frac{9}{2}\% = \frac{9/2}{100} = \frac{9}{200} = 0{,}045$

## CONTOH 1.2.6

Misal harga premium saat ini adalah Rp 5.000 per liter. Pemerintah mengumumkan kenaikan harga premium sebesar 30% yang diberlakukan bulan depan. Berapakah harga premium bulan depan?

Penyelesaian:

Harga premium bulan depan = harga premium saat ini + 30% dari harga premium saat ini.

= Rp 5.000 /liter + $\frac{30}{100} \times \text{Rp } 5.000$

$$= \text{Rp } 5.000 \times (1 + 0{,}3)/\text{liter}$$

$$= \text{Rp } 6.500/\text{liter}$$

- **RANGKUMAN**

- Perbandingan antara dua objek dapat dinyatakan dalam bentuk pembagian bilangan.
- Skala biasanya digunakan untuk perbandingan ukuran pada peta (*miniature*, *blue print*) dengan ukuran sebenarnya.
- Perbandingan suatu bilangan dengan bilangan 100 disebut dengan ***persen*** **(%)**.

## SOAL LATIHAN 2-2

1. Wawan mempunyai buku sebanyak 9 buah, sedangkan Wati mempunyai 6 buah. Berapakah perbandingan banyaknya buku Wawan dan banyaknya buku Wati?
2. Berat badan Eko 65 kg dan berat badan Seno 73 kg. Berapakah perbandingan berat badan Eko dan Seno ?
3. Jarak rumah Dede ke Sekolah adalah 400 m dan jarak rumah Dede ke Warnet adalah 2 km. Berapakah perbandingan jarak ke Sekolah dan jarak ke Warnet dari rumah Dede ?
4. Kiki membeli 2 buah apel dan Dede membeli 8 buah apel. Jika harga seluruhnya Rp 12.000, maka berapakah banyaknya uang yang harus dikeluarkan oleh Kiki dan Dede?

5. Seorang pemborong dapat menyelesaikan pembangunan jembatan selama 64 hari dengan pekerja 48 orang. Berapa pekerjakah yang diperlukan bila pembangunan jembatan ingin dipercepat selesai menjadi 12 hari?

6. Jarak kota *A* ke kota *B* adalah 100 km. Jika Zaza naik sepeda motor *Z* dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam, maka berapa waktu yang diperlukan oleh Zaza sampai tujuan? Jika Zaza naik sepeda motor *Y* dengan kecepatan rata-rata 50 km/jam, maka berapa waktu yang diperlukan oleh Zaza sampai tujuan?

7. Tika membeli apel 10 kg seharga Rp 50.000. Setelah dijual, Tika mendapatkan laba 25%. Tentukan harga jual apel per kg?

8. Sebuah lahan berbentuk persegi panjang dengan keliling 100 m. Jika lebar lahan tersebut 8 m kurang dari panjangnya, maka tentukan luas lahan tersebut?.

9. Sebuah perusahaan mempunyai dua lokasi pabrik. Pabrik A seluas 1.500 $m^2$, sedangkan pabrik B seluas 2.000 $m^2$. Untuk keperluan diversifikasi usaha, perusahaan tersebut menambah pabrik C seluas jumlahan dari luas pabrik A dan B. Tentukan luas tanah yang dimiliki oleh perusahaan tersbut.

10. Pada gambar *blue print* dari sebuah gedung, tinggi gedung tersebut adalah 2 cm dan tinggi pintunya adalah 1cm. Jika tinggi pintu yang sebenarnya adalah 2 m, maka tentukan tinggi gedung yang sebenarnya?

## 1.3 OPERASI PADA BILANGAN BERPANGKAT BULAT

Pada bagian ini dibahas mengenai pengertian bilangan berpangkat dan sifat-sifatnya. Bilangan berpangkat yaitu suatu bilangan yang dipangkatkan dengan bilangan lain. Pangkat dari suatu bilangan dapat berupa bilangan bulat atau pecahan. Diuraikan pula, semua sifat-sifat operasi aljabar dari bilangan berpangkat dan penerapannya.

### 1.3.1 PANGKAT BILANGAN POSITIF

Biasanya penulisan bilangan yang cukup besar akan menjadi sederhana apabila ditulis dalam bentuk perpangkatan, misalnya 2.000.000 dapat ditulis sebagai $2 \times 10^6$.

**DEFINISI 1.3.1 :**

Untuk bilangan bulat positif *n* dan sembarang bilangan real *a*, bilangan $a^n$ (dibaca: *a* pangkat *n*) mempunyai arti:

$a \times a \times a \ldots \times a$ (sebanyak *n* faktor yang sama)

Bilangan *a* disebut basis dan bilangan *n* disebut pangkat atau eksponen.

**CONTOH 1.3.1 :**

Berikut ini adalah beberapa contoh bilangan berpangkat.

1. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   Bilangan 2 dipangkatkan 3, artinya adalah bilangan 2 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak 3 kali.
2. $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

   Bilangan -3 dipangkatkan 2, artinya adalah bilangan -3 dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak 2 kali.
3. $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$

4. $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

■ Sifat Operasi Bilangan Berpangkat Positif

i. Jika *m* dan *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan real sembarang, maka $a^{m+n} = a^m \times a^n$.

ii. Jika *m* dan *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan real sembarang dengan $a \neq 0$, maka $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

iii. Jika *m* dan *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan real sembarang, maka $(a^m)^n = a^{m\times n}$

iv. Jika *n* bilangan bulat positif dan *a, b* bilangan real sembarang, maka berlaku:

a. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

b. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ , untuk $b \neq 0$.

CONTOH 1.3.2 :

Berikut ini adalah beberapa contoh bilangan berpangkat.

a. $2^{4+3} = 2^4 \times 2^3 = 16 \times 8 = 128$

b. $(-3)^{5+2} = (-3)^5 \times (-3)^2 = (-243) \times 9 = -2087$

c. $(\frac{2}{3})^{3+2} = (\frac{2}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^2 = (\frac{8}{27}) \times \frac{4}{9} = \frac{32}{261}$

d. $2^{4-3} = \frac{2^4}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$

e. $(-3)^{5-2} = (-3)^5 : (-3)^2 = (-243) : 9 = -27$

f. $(2^4)^3 = 2^{4\times3} = 2^{12} = 2048$

g. $(-3\times4)^5 = (-3)^5 \times 4^5 = (-243) \times 1024 = -248.832$

h. $(\frac{2}{3})^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

## CONTOH 1.3.3 :

Hitunglah ekspresi berikut ini dan tuliskan hasilnya tanpa menggunakan tanda kurung.

a. $(a^2-b^2) \times (a^2+b^2)$

b. $(a^2+b^2) \times (a^2+b^2)$

c. $(a^2-3b^3) \times (a^2-b^3)$

d. $(a^2-b^3)^2$

Penyelesaian:

a. $(a^2-b^2) \times (a^2+b^2) = a^2(a^2+b^2) - b^2(a^2+b^2)$ (Sifat distributif)

$= a^4+a^2b^2 - \{b^2a^2+b^4\}$ (Sifat distributif)

$= a^4+a^2b^2 - a^2b^2-b^4\}$ (Sifat komutatif)

$= a^4-b^4$

b. $(a^2+b^2) \times (a^2+b^2) = a^2(a^2+b^2) + b^2(a^2+b^2)$ (Sifat distributif)

$= a^4+a^2b^2 + \{b^2a^2+b^4\}$ (Sifat distributif)

$= a^4+a^2b^2 + a^2b^2+b^4$ (Sifat komutatif)

$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

c. $(a^2-3b^3)\times(a^2-b^3) = a^2(a^2-b^3) - 3b^3(a^2-b^3)$ (Sifat distributif)

$= a^4-a^2b^3 - \{3b^3a^2-3b^6\}$ (Sifat distributif)

$= a^4-a^2b^3 - 3a^2b^3+3b^6$ (Sifat komutatif)

$= a^4 - 4a^2b^3 + 3b^6$

*d.* $(a^2-b^3)^2 = (a^2-b^3) \times (a^2-b^3)$

$= a^2(a^2-b^3) - b^3(a^2-b^3)$ (Sifat distributif)

$= a^4-a^2b^3 - \{b^3a^2-b^6\}$ (Sifat distributif)

$= a^4-a^2b^3 - a^2b^3+b^4$ (Sifat komutatif)

$= a^4 - 2a^2b^3 + b^6$

## 1.3.2 PANGKAT BILANGAN NEGATIF DAN NOL

Pada subbab sebelumnya, telah dibahas mengenai perpangkatan dengan bilangan bulat positif, yang artinya perkalian atas basis bilangan (sebagai faktor) sebanyak pangkat yang diketahui. Bagaimana suatu bilangan berpangkat bilangan negatif atau berpangkat nol, seperti $10^{-2}$ atau $7^0$ ?. Gagasan-gagasan yang muncul dari sifat-sifat perpangkatan dengan pangkat bilangan bulat positif dapat digunakan untuk mengungkapkan arti pangkat bilangan negatif ataupun pangkat nol.

### ■ Bilangan Berpangkat Nol

Untuk memahami arti bilangan $a^0$, perhatikan sifat perpangkatan

$$a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$$

Jika $a^m \neq 0$ maka haruslah $a^0 = 1$, agar kesamaan $a^0 \times a^m = a^m$ dipenuhi. Selanjutnya dengan tambahan syarat untuk bilangan $a$, yaitu agar $a^m \neq 0$ cukup dipilih $a \neq 0$. Perhatikan definisi berikut ini.

**DEFINISI 1.3.2 :**

Untuk bilangan real $a \neq 0$, $a^0$ (dibaca: *a* pangkat *0*) didefinisikan sebagai:

$$a^0 = 1$$

**CONTOH 1.3.4 :**

a. $2^0 = 1$
b. $(-3)^0 = 1$
c. $(\frac{-2}{5}+7)^0 = 1$
d. $(a + b)^0 = 1$, apabila $a + b \neq 0$

### ■ Bilangan Berpangkat Negatif

Bagaimana kita mendefinisikan bilangan pangkat negatif ?. Mari kita lihat kembali sifat perpangkatan

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Jika $a \neq 0$ dan $m = 0$ maka didapat

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Oleh karena itu dibuat definisi bilangan berpangkat negatif berikut ini.

DEFINISI 1.3.3 :

Untuk bilangan bulat $n$ dan bilangan real $a \neq 0$, $a^{-n}$ didefinisikan sebagai:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

CONTOH 1.3.5 :

a. $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

b. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{(-5/7)^2} = \frac{1}{(-5/7)(-5/7)} = \frac{1}{25/49} = \frac{49}{25}$

c. $(-2x)^{-4} = \frac{1}{(-2x)^4} = \frac{1}{(-2)^4 x^4} = \frac{1}{16x^4}$

Sekarang kita telah mengenal bilangan berpangkat bilangan bulat, baik itu berpangkat bulat positif, bulat negatif, maupun berpangkat 0.

- **Sifat Operasi Bilangan Berpangkat Positif**

i. Jika $m$ dan $n$ bilangan bulat dan $a$ bilangan real sembarang dengan $a \neq 0$, maka $a^{m+n} = a^m \times a^n$.

ii. Jika *m* dan *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan real sembarang dengan $a \neq 0$, maka $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

iii. Jika *m* dan *n* bilangan bulat positif dan *a* bilangan real sembarang dengan $a \neq 0$, maka $(a^m)^n = a^{m \times n}$

iv. Jika *n* bilangan bulat positif dan *a, b* bilangan real sembarang dengan $a \neq 0$ dan dengan $b \neq 0$, maka berlaku:

a. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

b. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

CONTOH 1.3.6 :

Sederhanakanlah:

a. $(4^{-3} \times 2^{-5})^{-1}(5^{-2} \times 25^{-1})^{-2}$

b. $\frac{3^{-2}+3^{-2}}{2^{-5}-3^{-2}}$

Penyelesaian:

a. $(4^{-3} \times 2^{-5})^{-1}(5^{-2} \times 25^{-1})^{-2} =$

$= ((2^2)^{-3} \times 2^{-5})^{-1}(5^{-2} \times (5^2)^{-1})^{-2}$

$= (2^{-6} \times 2^{-5})^{-1}(5^{-2} \times 5^{-2})^{-2}$

$= (2^{-11})^{-1}(5^{-4})^{-2}$

$= 2^{11} \times 5^8$

*b.* $\frac{3^{-2}+3^{-2}}{2^{-5}-3^{-2}}$

$$= \frac{(2 \times 3^{-2}) \times 2^5 \times 3^2}{(2^{-5} - 3^{-2}) \times 2^5 \times 3^2} = \frac{2^6 \times 3^0}{2^0 \times 3^2 - 2^5 3^0} = \frac{2^6}{3^2 - 2^5}$$

$$= \frac{64}{9-25} = \frac{64}{-16} = -4$$

CONTOH 1.3.7 :

Tuliskan bentuk

$$\frac{(x+y)^{-1}}{x^{-2}-y^{-1}}$$

ke dalam bentuk pangkat bilangan bulat positif.

Penyelesaian:

$$\frac{(x+y)^{-1}}{x^{-2} \quad y^{-1}} = \frac{(x+y)^{-1} \times x^2 y}{(x^{-2} \quad y^{-1}) \times x^2 y} = \frac{(x+y)^{-1} \times x^2 y}{x^0 y \quad x^2 y} =$$

$$- \frac{(x+y)^{-1} \times x^2 y \times (x+y)}{(y - x^2 y) \times (x+y)} - \frac{(x+y)^0 \times x^2 y}{(yx + y^2 - x^3 y - x^2 y^2)}$$

$$= \frac{x^2 y}{y(x + y - x^3 - x^2 y)} = \frac{x^2}{(x + y - x^3 - x^2 y)}$$

■ **Notasi Ilmiah dari Bilangan**

Notasi ilmiah dari bilangan digunakan untuk menuliskan bilangan yang sangat besar ataupun bilangan yang sangat kecil. Sebagai contoh, bilangan 375.000.000.000 ditulis sebagai $3{,}75 \times 10^{11}$, bilangan -0,00000016 ditulis sebagai $-1{,}6 \times 10^{-7}$.

Bentuk baku notasi ilmiah suatu bilangan adalah penulisan dalam bentuk

$a \times 10^{n}$ dengan -10 < *a* < 10 dan *n* bilangan bulat

Perlu diperhatikan pengertian perpindahan letak tanda koma (desimal), yaitu:

i. Pergeseran (melompat) *n* angka/digit ke kiri berarti memunculkan perkalian dengan $10^{n}$.

ii. Pergeseran (melompat) *n* angka ke kanan berarti memunculkan perkalian dengan $10^{-n}$.

CONTOH 1.3.8 :

Tuliskanlah bilangan – bilangan berikut ini dalam notasi ilmiah.

a. Jarak bumi ke matahari sekitar 150.000.000 km.
b. -0,00002345

Penyelesaian:

a. Jarak bumi ke matahari kira-kira $1{,}5 \times 10^{8}$ km.
   Didapat dengan cara menggeser tanda koma ke kiri sampai setelah angka pertama. Dalam hal ini diperlukan 8 kali lompatan.

b. Bilangan -0,00002345 apabila ditulis dalam notasi ilmiah diperlukan menggeser tanda koma hingga setelah angka tak nol pertama. Jadi diperlukan pergeseran ke kanan sebanyak 5 lompatan, sehingga diperoleh $2{,}345 \times 10^{-5}$.

## 1.3.3 PENERAPAN OPERASI BILANGAN BERPANGKAT

Sebelum ini, kita telah mengenal bilangan berpangkat, operasi bilangan berpangkat, dan sifat-sifatnya. Pada subbab ini, kita akan memakai operasi bilangan berpangkat ini pada beberapa permasalahan matematika, permasalahan yang terkait dengan bisnis, dan kehidupan sehari-hari. Beberapa penerapan disajikan dalam bentuk contoh. Pertama kita awali dengan contoh yang sederhana, memuat pangkat 2 atau kuadrat.

### CONTOH 1.3.9

Seorang pemborong pelayanan kebersihan gedung akan melakukan pekerjaan pembersihan gedung yang bentuknya hampir menyerupai setengah bola. Biaya pembersihan Rp. 50.000 per $m^2$. Jika diameter gedung adalah 200 *m,* maka berapa perkiraan biaya pembersihan permukaan gedung tersebut ?

**Penyelesaian:**

Luas permukaan gedung didekati dengan setengah luas kulit bola. Karena itu, luas permukaan gedung mendekati

$$L = 2\pi r^2$$

dengan L adalah luas permukaan gedung, *r* adalah jari-jari gedung = setengah dari diameter, dan π didekati dengan 3,14.

$$L = 2\pi r^2 = 2 \times 3{,}14 \times 100^2 = 62.800\ m^2$$

Biaya pembersihan per $m^2$ adalah Rp 50.000, sehingga perkiraan biaya pembersihan keseluruhan gedung adalah

$$\frac{Rp\,50.000}{m^2} \times 62.800\ m^2 = Rp\,3.140.000.000$$

Untuk contoh penerapan yang lainnya, coba kita perhatikan segitiga Pascal berikut ini.

- **Segitiga Pascal**

Salah satu pemakaian bilangan berpangkat adalah untuk menghitung / menguraikan bentuk $(x+y)^k$. Hasil dari penguraian bentuk $(x+y)^k$ mempunyai suatu keteraturan koefisien dari setiap suku yang dinamakan **Segitiga Pascal**.

Sekarang kita coba uraikan bentuk $(x+y)^k$ untuk *k* = 0, 1, 2, 3, 4, 5 seperti berikut ini.

i. $(x+y)^0 = 1$

ii. $(x+y)^1 = 1\,x + 1\,y$

iii. $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$
$= 1\,x^2 + 2\,xy + 1\,y^2$

iv. $(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y)$
$= 1\,x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1\,y^3$

v. $(x+y)^4 = (x+y)^3(x+y)$
$= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y)$
$= 1\,x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1\,y^4$

vi. $(x+y)^5 = (x+y)^4(x+y)$

$$= (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)(x+y)$$

$$= 1\,x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1\,y^5$$

Perhatikan pada uraian di atas, bahwa:

- Pada setiap suku dari $(x+y)^k$, ada bentuk $x^{k-i}y^i$ dengan *i* = 0, 1, 2, ..., *k*.

  Sebagai ilustrasi, perhatikan untuk *k*=5 berikut ini.

  $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

  - Pada suku ke-1, (*i*=0), mempunyai bentuk $x^5 = x^5y^0 = x^{5-0}y^0$
  - Pada suku ke-2, (*i*=1), mempunyai bentuk $x^4y^1 = x^{5-1}y^1$
  - Pada suku ke-3, (i=2), mempunyai bentuk $x^3y^2 = x^{5-2}y^2$
  - Pada suku ke-4, (i=3), mempunyai bentuk $x^2y^3 = x^{5-3}y^3$
  - Pada suku ke-5, (i=4), mempunyai bentuk $x^1y^4 = x^{5-4}y^4$
  - Pada suku ke-6, (i=5), mempunyai bentuk $y^5 = x^0y^5 = x^{5-5}y^5$

- Konstanta (koefisien) dari tiap-tiap suku pada $(x+y)^0$ sampai dengan $(x+y)^5$ mempunyai suatu bentuk keteraturan yang dinamakan **segitiga Pascal** seperti berikut ini.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k=$ | 0 | → | | | | | | 1 | | | | | |
| $k=$ | 1 | → | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| $k=$ | 2 | → | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| $k=$ | 3 | → | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| $k=$ | 4 | → | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| $k=$ | 5 | → | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| | | | | + | | + | | + | | + | | + | |

Gambar 1.3.1 Segitiga Pascal Enam Baris

Kalau diperhatikan nilai-nilai pada suatu baris ke-*k* pada segitiga Pascal merupakan *'jumlahan silang'* dari baris ke *k*-1 (baris sebelumnya). Sehingga koefisien segitiga Pascal tersebut dapat kita lanjutkan lagi untuk *k*=6 dan *k*=7 seperti Gambar 1.3.2.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k=$ | 0 | → | | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| $k=$ | 1 | → | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | |
| $k=$ | 2 | → | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | |
| $k=$ | 3 | → | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | |
| $k=$ | 4 | → | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | |
| $k=$ | 5 | → | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | |
| $k=$ | 6 | → | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | |
| $k=$ | 7 | → | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |

Gambar 1.3.2 Segitiga Pascal Delapan Baris

## ONTOH 1.3.10

Dengan menggunakan segitiga Pascal, uraikan bentuk – bentuk perpangkatan dibawah ini.

a. $(x+y)^6$

b. $(x-y)^7$

Penyelesaian:

a. Nilai-nilai pada baris *k*=6 merupakan koefisien-koefisien dari $(x+y)^6$, diperoleh

$(x+y)^6 =$

$= 1\,x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + 1\,y^5$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^5$

b. Nilai-nilai pada baris *k*=7 merupakan koefisien-koefisien dari $(x-y)^7$, diperoleh

$$(x-y)^7 = (x+(-y))^7$$
$$= x^7 + 7x^6(-y) + 21x^5(-y)^2 + 35x^4(-y)^3 +$$
$$35x^3(-y)^4 + 21x^2(-y)^5 + 7x(-y)^6 + (-y)^7$$
$$= x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 +$$
$$+35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$$

## CONTOH 1.3.11

Persamaan untuk menghitung investasi dengan modal $M_o = Rp\ 1.000.000$ dengan laju bunga *i*=10% per tahun selama *n* tahun adalah

$$M_n = M_o \times (1+i)^n$$

$M_o$ adalah modal awal, sedangkan $M_n$ adalah jumlah uang setelah *n* tahun. Berapakah total nilai uang setelah 2 tahun ?.

$$M_n = 1.000.000 \times (1+0{,}1)^2$$

$$\Longrightarrow\ M_n = 1.0 \times 10^6 \times (1{,}1)^2$$

$$\Longrightarrow\ M_n = 1.0 \times 10^6 \times (11 \times 10^{-1})^2$$

$$\Longrightarrow\ M_n = 1.0 \times 10^6 \times (11)^2 \times 10^{-2}$$

$$\Longrightarrow\ M_n = 121 \times 10^{6-2} = 121 \times 10^4$$

Jadi besarnya investasi setelah dua tahun adalah Rp 1.210.000.

CONTOH 1.3.12

Pada tanggal 1 Januari 2004, bapaknya si A meminjam uang bank sebesar untuk pengembangan usaha. Pinjaman tersebut ditagihkan kepada si A pada tanggal 31 Desember 2007 sebesar \$ $5208{,}33$. Jika bunga pinjaman sebesar 4% per tahun ditambahkan pada tiap akhir tahun sebagai pinjaman, maka berapa besar yang dipinjam oleh bapaknya si A?

**Penyelesaian:**

Karena bunga ditambahkan sebagai pinjaman di setiap akhir tahun, bank menerapkan bunga berbunga. Oleh karena itu, kita pakai rumus

$$M_n = M_o \times (1 + i)^n$$

$M_o$ adalah pinjaman awal, sedangkan $M_n$ adalah jumlah pinjaman setelah $n$ tahun. Pinjaman dilakukan selama 4 tahun, dari 1 Januari 2004 sampai dengan 31 Desember 2007. Sedangkan $i$ adalah besarnya bunga tiap tahun.

$$5208{,}33 = M_o \times (1 + 0{,}04)^4$$

$$\Rightarrow \; M_o = \frac{5208{,}33}{(1 + 0{,}04)^4}$$

Kita hitung terlebih dahulu $(1 + 0{,}04)^4$ sebagai berikut.

$$(1 + 0{,}04)^4 = 1 + 0{,}04 + 0{,}04^2 + 0{,}04^3 + 0{,}04^4.$$

$$= 1{,}04 + 0{,}0016 + 0{,}000064 + 0{,}00000256.$$

$$= 1{,}04166656.$$

Hasil ini dimasukkan ke

$$\Longrightarrow M_o = \frac{5208{,}33}{(1+0{,}04)^4} = \frac{5208{,}33}{1{,}04166656} = 5000$$

Jadi besarnya pinjaman oleh bapaknya si A adalah $ 5000.

## • RANGKUMAN

- Bilangan real dapat di pangkatkan dengan bilangan bulat.
- Untuk bilangan real $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
- Untuk n bulat positif dan $a$ real, bilangan $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$.
- Sifat operasi pangkat bulat pada bilangan real:
  1. $a^{m+n} = a^m \times a^n$
  2. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
  3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
  5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

## SOAL LATIHAN 2-3

1. Jika $a$ dan $b$ merupakan bilangan real, maka nyatakan ekspresi berikut ini dalam bentuk notasi pangkat (eksponen).

   a. $5 \times 5 \times 5 \times 5$

   b. $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

   c. $-2 \times 4 \times 2 \times (-16)$

   d. $2a \times 2a \times 2a$

   e. $ab \times ab \times ab$

   f. $(-b) \times (-b) \times (-b)$

2. Jika $a$ dan $b$ merupakan bilangan real, maka nyatakan ekspresi berikut ini menjadi bentuk bilangan yang lebih sederhana.

   a. $25^4$

   b. $(-16)^2$

   c. $(-2ab^2)^4$

   d. $(2a)^5$

   e. $(\frac{2}{3}a^2b^3)^4$

   f. $(2\frac{a}{-b^2})^4$

3. Jika $x$ dan $y$ adalah bilangan real, maka sederhanakanlah ekspresi berikut ini menjadi bentuk yang tidak memuat tanda kurung.

   a. $(25-16)^3$

   b. $(-2+16)(2+8)^2$

   c. $(-2x-y)^2$

   d. $(2x+y)^3$

   e. $\left(\frac{2}{3}x^2y^3 - y^2\right)(x^2 - xy^2)$

   f. $\left(2 + \frac{x}{y^2}\right)(1 - \frac{y^2}{x})$

4. Jika $a, b, x$ dan $y$ adalah bilangan real, maka sederhanakanlah ekspresi rasional berikut ini.

   a. $\frac{2^4 6^2}{3^2}$

   b. $\frac{8a^4b^2}{2\,a^2b} \times \frac{1}{4ab}$

   c. $\frac{15\,x^3y}{3x^2}$

   d. $\frac{15\,x^3y}{3x^2} + \frac{x^2y}{3x^2}$

   e. $\frac{b^3xy}{ax} - \frac{b^2y}{by}$

   f. $\left(2 + \frac{x}{y}\right)(1 - \frac{y}{x})$

5. Tentukan hasil perkalian berikut ini dan tuliskan dalam bentuk pangkat bilangan positif.

   a. $5^5 . 5^3$

   b. $3^{-5} . 9^3$

   c. $5^{-5} . 5^{-3}$

   d. $(2x)^3(3y^{-2})$

e. $\frac{7^5}{7^3}$

f. $\frac{7^{-5}}{7^3}$

g. $\frac{8x^2y^{-3}}{2x^{-3}y^{-5}}$

h. $(4x^2y^{-3})(2x^{-2}y^3)^{-2}$

6. Tuliskanlah bilangan – bilangan berikut ini dalam notasi ilmiah.

   a. 10.000.000

   b. $3^{-5}$. $90^3$

   c. 0,00000314

   d. -0,012

   e. Diameter atom Helium adalah 0,000000022 cm

   f. Pada tahun 2010, penduduk Indonesia berjumlah 300 juta.

## 1.4 BILANGAN DALAM BENTUK AKAR (IRRASIONAL)

Pada bagian ini dibahas mengenai bentuk akar, misalnya $\sqrt{16} = 4$.

Bentuk akar ditulis menggunakan tanda radikal dengan simbul $\sqrt{\ }$. Sedangkan kata *akar* merupakan terjemahan dari kata *root* dalam bahasa Inggris.

DEFINISI 1.4.1 :

***Akar kuadrat*** suatu bilangan real *a* non negatif adalah bilangan non negatif *b* yang kalau dipangkatkan dua, menjadi bilangan semula *a*. Secara notasi matematika:

$\sqrt{a} = b$ jika $b^2 = a$; dan *b* bilangan positif

Tulisan $\sqrt{a}$ dibaca "*akar kuadrat dari a*" atau "*akar dari a*".

Jadi mencari akar suatu bilangan merupakan kebalikan dari pemangkatan.

## CONTOH 1.4.1 :

a. $\sqrt{9} = 3$, karena $3^2 = 9$
b. $\sqrt{25} = 5$, karena $5^2 = 25$

## CONTOH 1.4.2 :

Tentukan hasil akar kuadrat berikut ini.

a. $\sqrt{1296}$
b. $\sqrt{194481}$

Penyelesaian:

a. Pertama, difaktorkan 1296. Karena akhir bilangan tersebut adalah 2, maka 2 merupakan faktor.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1296} &= \sqrt{2 \times 648} && \text{(648 difaktorkan)}\\
&= \sqrt{2 \times 2 \times 324} && \text{(324 difaktorkan)}\\
&= \sqrt{2^2 \times 2 \times 162} && \text{(162 difaktorkan)}\\
&= \sqrt{2^3 \times 2 \times 81} && \text{(81 difaktorkan)}\\
&= \sqrt{2^4 \times 3^4}\\
&= \sqrt{(2 \times 3)^4}\\
&= \sqrt{((2 \times 3)^2)^2}
\end{aligned}$$

Jadi $\sqrt{1296} = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$ karena $36^2 = 1296$

b. Faktorkan bilangan 194481 menjadi 194481 = $3^4 \times 7^4 = (3^2 \times 7^2)^2$.

$\sqrt{194481} = \sqrt{(3^2 \times 7^2)^2}$

Jadi $\sqrt{194481} = (3 \times 7)^2 = 441$ karena $441^2 = 194481$

Kalau kita lihat definisi akar di atas, berlaku bahwa:

i. $\sqrt{p^2} = p$, untuk $p \geq 0$

ii. $\sqrt{p^2} = -p$, untuk $p < 0$

CONTOH 1.4.3 :

a. $\sqrt{4^2} = 4$

b. $\sqrt{(-9)^2} = -(-9) = 9$

CONTOH 1.4.4 :

Untuk *x* bilangan real, tentukan hasil dari $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$ .

Penyelesaian:

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2}$

$= x + 1$, jika $(x+1) \geq 0$ atau $x \geq -1$

$= -(x+1)$, jika $(x+1) < 0$ atau $x < -1$

## 1.4.1 OPERASI ALJABAR PADA BILANGAN BERBENTUK AKAR

Bilangan dalam bentuk akar juga dapat dikenakan operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Karena pada dasarnya bilangan dalam bentuk akar adalah suatu bilangan real yang dapat dioperasikan.

**■ Perkalian dan Pembagian Bilangan Bentuk Akar**

Jika *a* dan *b* merupakan bilangan real positif, maka berlaku:

i. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

ii. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

CONTOH 1.4.5 :

a. $\sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b. $4\sqrt{3} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{3 \times 5} = 4\sqrt{15}$

c. $3\sqrt{\frac{36}{81}} = 3\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = 3\frac{6}{9} = 2$

d. $\frac{\sqrt{a^3bc^5}}{\sqrt{abc}} = \sqrt{\frac{a^3bc^5}{abc}} = \sqrt{a^2c^4} = ac^2$ jika a > 0.

■ **Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bentuk Akar**

Jika *a, b* merupakan bilangan real dan *c* merupakan bilangan real positif, maka berlaku:

i. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$

ii. $a\sqrt{c} \quad b\sqrt{c} = (a \quad b)\sqrt{c}$

Jika kita lihat sifat di atas, maka penjumlahan dan pengurangan bilangan dalam bentuk akar hanya dapat dilakukan pada dua bilangan yang sejenis (pada ekspresi i & ii di atas $\sqrt{c}$ dikatakan bilangan sejenis). Lihat kembali sifat distributif pada bilangan real, sebenarnya operasi jumlah dan kurang di atas sama dengan yang telah lalu.

CONTOH 1.4.6 :

Tentukan hasil dari pengoperasian bilangan bentuk akar di bawah ini.

a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

b. $\sqrt{12} - 5\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$

Penyelesaian:

Jika bilangan dalam tanda akar belum sejenis, maka kita rubah sebisa mungkin untuk dapat sejenis.

a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

b. $\sqrt{12} - 5\sqrt{3} = \sqrt{4.3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{4.5} + 5\sqrt{9.5} - 2\sqrt{5}$

$$= 4\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= (4+15)\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= (19-2)\sqrt{5}$$

$$= 17\sqrt{5}$$

CONTOH 1.4.7 :

Sederhanakanlah bentuk $3\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} - \sqrt{12}\right)$.

Penyelesaian:

Sifat distributif pada bilangan real dapat dipakai, karena bilangan dalam bentuk akar juga merupakan bilangan real.

$$3\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} - \sqrt{12}\right) = 15\sqrt{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\sqrt{12}$$

$$= 15(3) - 3\sqrt{36} = 45 - 18 = 27$$

## 1.4.2 MERASIONALKAN PENYEBUT

Pada pembagian yang memuat bentuk akar, hasilnya dapat berupa pecahan dengan penyebut bentuk akar. Bentuk akar pada penyebut itu dapat diubah sehingga penyebutnya tidak lagi memuat bentuk akar. Proses demikian dinamakan ***merasionalkan penyebut***. Proses merasionalkan penyebut dapat dikerjakan dengan memanfaatkan bentuk perkalian:

i. $a \times a = a^2$
ii. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

CONTOH 1.4.8 :

Rasionalkan penyebut pada bilangan:

a. $\sqrt{\frac{5}{2}}$ b. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ c. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Penyelesaian:

a. Pada kasus ini, kalikan penyebutnya dengan bilangan yang sama dengan penyebut tersebut, yaitu $\sqrt{2}$. Agar tidak merubah nilai bilangan, pembilang juga dikalikan $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b. Pada kasus ini, kalikan penyebutnya dengan bilangan yang sama dengan penyebut tersebut, yaitu $\sqrt{5}$. Agar tidak merubah nilai bilangan, pembilang juga dikalikan $\sqrt{5}$.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$$

c. Pada kasus ini, gunakan bentuk $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Oleh karena itu, kalikan penyebutnya dengan bilangan $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ dan kalikan pembilang dengan $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5 \quad 2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

## CONTOH 1.4.9 :

Rasionalkan penyebut pada bilangan $\frac{3}{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ .

Penyelesaian:

Pada kasus ini, penyebut memuat dua bilangan yang berbentuk akar. Bentuk akar ini akan kita hilangkan satu per satu.

Penyebut $2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ = $(2+\sqrt{3})-\sqrt{2}$, sehingga kita buat seperti berikut ini.

$$\frac{3}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{2}} \times \frac{(2+\sqrt{3})+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{2}} = \frac{3(2+\sqrt{3})+3\sqrt{2}}{(2+\sqrt{3})^2-2}$$

$$= \frac{(6+3\sqrt{3})+3\sqrt{2}}{(4+4\sqrt{3}+3)-2}$$

$$= \frac{(6+3\sqrt{3})+3\sqrt{2}}{(5+4\sqrt{3})}$$ ; penyebut hanya memuat

satu bentuk akar

$$= \frac{(6+3\sqrt{3})+3\sqrt{2}}{(5+4\sqrt{3})} \times \frac{(5-4\sqrt{3})}{(5-4\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(6+3\sqrt{3})5-(6+3\sqrt{3})4\sqrt{3}+15\sqrt{2}-12\sqrt{6}}{(25+48)}$$

$$= \frac{(30+15\sqrt{3})-(24\sqrt{3}+36)+15\sqrt{2}-12\sqrt{6}}{73}$$

$$= \frac{-6-9\sqrt{3}+15\sqrt{2}-12\sqrt{6}}{73}$$

## SOAL LATIHAN 2-4

1. Dengan memfaktorkan bilangan dalam tanda akar, carilah nilai akarnya.
   a. $\sqrt{256}$
   b. $\sqrt{243}$
   c. $\sqrt{529}$
   d. $\sqrt{441}$
   e. $\sqrt{2304}$
   f. $\sqrt{1024}$
2. Dengan memfaktorkan bilangan dalam tanda akar, carilah nilai akarnya.
   a. $\sqrt{1369}$
   b. $\sqrt{11449}$
   c. $\sqrt{15129}$
   d. $\sqrt{1500625}$
   e. $\sqrt{18662400}$
   f. $\sqrt{57153600}$
3. Carilah nilai akar dari $\sqrt{14 \times 18 \times 105 \times 625}$.

4. Jika $x$ merupakan bilangan real positif, maka tentukan nilai akar berikut ini.

   a. $\sqrt{25x^2}$ b. $\sqrt{(x-1)^2}$

   c. $\sqrt{x^2-5x+6}$ d. $\sqrt{2x^2+18x+40}$

5. Carilah tiga contoh bilangan, apabila bilangan tersebut dikuadratkan berakhir dengan angka 1 atau 9 ?.

6. Carilah contoh bilangan, apabila bilangan tersebut dikuadratkan berakhir dengan angka 2, 3, 7, atau 8 ?.

7. Jelaskan bahwa bilangan bulat yang berakhir dengan angka nol sebanyak ganjil bukan merupakan bilangan kuadrat.

8. Tentukan hasil dari operasi aljabar pada bilangan bentuk akar di bawah ini.

   a. $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ b. $\sqrt{18}+\sqrt{12}-5\sqrt{2}$

   c. $4\sqrt{5}-\sqrt{75}-\sqrt{250}$ d. $\sqrt{75}+\sqrt{48}-6\sqrt{\frac{3}{9}}$

   e. $3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$ f. $\sqrt{\frac{1}{3}}\times 2\sqrt{3}$

   g. $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{24})$ h. $\sqrt{a^3b^5}\times\sqrt{a^2b^5}$

9. Rasionalkan bilangan bentuk akar dibawah ini.

   a. $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b. $\frac{1-5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

   c. $\frac{5\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$ d. $\frac{5+\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}}$

   e. $\frac{1}{b+a\sqrt{b}}$ f. $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   g. $\frac{5-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ h. $\frac{1}{2+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

## 1.5 BILANGAN BERPANGKAT RASIONAL

Sebelum ini telah dikenalkan perpangkatan bilangan real dengan bilangan bulat. Pertanyaan selanjutnya adalah "apakah diperbolehkan bilangan real berpangkat dengan rasional ?". Pada subbab ini akan dibahas bilangan real dipangkatkan dengan bilangan rasional.

DEFINISI 1.5.1 :

Akar pangkat tiga dari suatu bilangan *a* adalah bilangan *b* yang apabila dipangkatkan 3 menjadi bilangan *a,* ditulis dengan

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ jika } b^3 = a$$

Untuk lebih jelasnya, kita lihat contoh numerik berikut ini.

CONTOH 1.5.1 :

a. $\sqrt[3]{8} = 2$ karena $2^3 = 8$.
b. $\sqrt[3]{125} = 5$ karena $5^3 = 125$.
c. $\sqrt[3]{-27} = -3$ karena $(-3)^3 = -27$.
d. $\sqrt[3]{1000} = 10$ karena $10^3 = 1000$.
e. $\sqrt[3]{-1000} = -10$ karena $(-10)^3 = -1000$.

DEFINISI 1.5.2 :

Akar pangkat *n* dari suatu bilangan *a* adalah bilangan *b* yang apabila dipangkatkan *n* menjadi bilangan *a,* ditulis dengan

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ jika } b^n = a$$

Jika *n* genap, maka nilai *a* harus non negatif.

Dalam keadaan khusus:

- Jika *n* genap maka $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ jika } a \geq 0 \\ -a, \text{ jika } a < 0 \end{cases}$
- Jika *n* ganjil maka $\sqrt[n]{a^n} = a$ , untuk sembarang nilai *a.*

Untuk lebih jelasnya, kita lihat contoh numerik berikut ini.

CONTOH 1.5.2 :

a. $\sqrt[4]{16} = 2$ karena $2^4 = 16$.

b. $\sqrt[4]{625} = 5$ karena $5^4 = 625$.

c. $\sqrt[5]{-243} = -3$ karena $(-3)^5 = -243$.

d. $\sqrt[5]{100000} = 10$ karena $10^5 = 100000$.

e. $\sqrt[5]{-100000} = -10$ karena $(-10)^5 = -100000$.

CONTOH 1.5.3 :

Tentukan hasilnya (jika ada).

a. $\sqrt[5]{32}$ b. $\sqrt[4]{81}$ c. $\sqrt[5]{-1024}$

Penyelesaian:

a. Bilangan dalam tanda akar, 32 difaktorkan.

$32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$.

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

b. Bilangan dalam tanda akar, 81 difaktorkan.

$81 = 3 \times 27 = 3 \times 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$.

c. Bilangan dalam tanda akar, -1024 difaktorkan.

$-1024 = -2 \times 512 = \ldots$

$= -2^{10}$

$= (-2^2)^5$

$= (-4)^5$

$\sqrt[5]{-1024} = \sqrt[5]{(-4)^5} = -4.$

Selanjutnya, kita akan menelaah arti dari $a^{\frac{1}{n}}$. Berdasarkan rumusan sebelumnya bahwa $(a^m)^n = a^{m \times n}$, sehingga

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \times n} = a^1 = a$$

Dikaitkan dengan rumusan bahwa $\sqrt[n]{a} = b$ yang mempunyai arti $b^n = a$, maka dapat diperoleh

$$(\sqrt[n]{a})^n = b^n = a$$

DEFINISI 1.5.3 :

Untuk *n* bilangan asli, arti dari $a^{\frac{1}{n}}$ adalah $\sqrt[n]{a}$ atau

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$a^{\frac{1}{n}}$ akan mempunyai nilai apabila:

- Untuk *n* genap, nilai *a* harus positif.
- Untuk *n* ganjil.

Pangkat bilangan rasional secara umum didefinisikan berikut ini.

DEFINISI 1.5.4 :

Untuk bilangan bulat non )negatif *m* dan bilangan asli *n,* arti dari $a^{\frac{m}{n}}$ adalah

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

atau

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Untuk memperjelas maksud dari definisi ini, kita lihat contoh berikut ini.

CONTOH 1.5.4 :

Tentukan hasil dari operasi perpangkatan berikut ini.

a. $8^{\frac{2}{3}}$ b. $81^{\frac{3}{4}}$ c. $(-27)^{\frac{5}{3}}$

Penyelesaian:

a. $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

b. $81^{\frac{3}{4}} = (81^{\frac{1}{4}})^3 = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$

c. $(-27)^{\frac{5}{3}} = ((-27)^{\frac{1}{3}})^5 = (\sqrt[3]{-27})^5 = (-3)^5 = -243$

Sifat – sifat perpangkatan bilangan rasional sama dengan sifat perpangkatan bilangan bulat.

**■ Menyelesaikan Persamaan Pangkat Sederhana**

Persamaan pangkat mempunyai bentuk seperti $3^x = 9$ atau $x^2 = 9$. Untuk mendapatkan jawab persamaan pertama, ubahlah 9 menjadi bilangan berpangkat dengan basis (bilangan yang dipangkatkan) 3, yaitu

$$3^x = 3^2$$

Dengan demikian, jawab dari persamaan tersebut adalah $x = 2$. Untuk persamaan ke-dua, ubahlah 9 menjadi bilangan berpangkat 2, yaitu

$$x^2 = 3^2$$

Sehingga didapat jawab untuk persamaan itu. Dalam hal ini, karena pangkatnya genap maka terdapat dua jawab yang mungkin yaitu $x = 3$ atau $x = -3$.

Langkah-langkah serupa gambaran di atas, selanjutnya dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan pangkat yang lain.

CONTOH 1.5.5 :

Dapatkan penyelesaian dari persamaan berikut ini.

a. $2^{x+2} = 4\sqrt{2}$ b. $4^{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

Penyelesaian:

a. Ruas kanan dari persamaan ini dijadikan bentuk 2 pangkat sesuatu.

$$2^{x+2} = 2^2 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{5}{2}}$$

Dari sini kita dapatkan bahwa $x + 2 = \frac{5}{2}$ atau $x = \frac{1}{2}$.

b. Ruas kiri dan kanan dari persamaan ini dijadikan bentuk 2 pangkat sesuatu.

$$4^{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$2^{2x+2} = 2^{-3} 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{2x+2} = 2^{-\frac{5}{2}}$$

Dari sini kita dapatkan bahwa $2x + 2 = -\frac{5}{2}$ atau $x = -\frac{9}{4}$.

- **RANGKUMAN**
- Akar pangkat, $\sqrt[3]{a} = b$, jika $b^3 = a$.
- Akar pangkat *n*, $\sqrt[n]{a} = b$, jika $b^n = a$
- $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$

## SOAL LATIHAN 2-5

1. Tentukan nilai akar berikut ini.

   a. $\sqrt[3]{64}$ b. $\sqrt[3]{-64}$

   c. $\sqrt[4]{256}$ d. $\sqrt[4]{-256}$

   e. $\sqrt[5]{-1024}$ f. $\sqrt[5]{3125}$

2. Tentukan nilai perpangkatan berikut ini.

   a. $256^{\frac{1}{4}}$ b. $256^{\frac{3}{4}}$

   c. $27^{\frac{4}{3}}$ d. $(-27)^{\frac{4}{3}}$

   e. $(-1024)^{\frac{4}{5}}$ f. $125^{\frac{5}{3}}$

3. Tentukan nilai perpangkatan berikut ini.

   a. $(81 \times 256)^{\frac{1}{4}}$ b. $(64 \times 256)^{\frac{3}{4}}$

   c. $(8 \times 27 \times 512)^{\frac{4}{3}}$ d. $(-27000)^{\frac{4}{3}}$

   e. $(-1024 \times (-243))^{\frac{4}{5}}$ f. $125000^{\frac{5}{3}}$

4. Tentukan nilai perpangkatan berikut ini.

   a. $(\frac{81}{256})^{\frac{1}{4}}$ b. $(\frac{64}{256})^{\frac{3}{4}}$

   c. $(\frac{8 \times 27}{512})^{\frac{4}{3}}$ d. $(-0{,}125)^{\frac{4}{3}}$

   e. $(0{,}00243)^{\frac{4}{5}}$ f. $0{,}125^{\frac{5}{3}}$

5. Tentukan nilai perpangkatan berikut ini.

   a. $(\frac{81}{256} \times 16)^{\frac{1}{4}}$
   b. $(\frac{64}{256} \times 0{,}125)^{\frac{3}{4}}$
   c. $(0{,}0{,}037037037037037)^{\frac{4}{3}}$
   d. $(0{,}111111111111111)^{\frac{3}{2}}$
   e. $(0{,}00243 \times 0{,}125)^{\frac{4}{5}}$

6. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan rasional.

   a. $81^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{256}$
   b. $\sqrt[3]{216} \times (\sqrt[3]{512})^4$
   c. $\sqrt[3]{(-0{,}125)^4}$
   d. $(\sqrt[5]{0{,}00243})^6$

7. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan rasional yang sederhana.

   a. $\sqrt[4]{81\,x^{12}}$
   b. $\sqrt[3]{27x^6y^9}$
   c. $\frac{\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}}{\sqrt{x}}$
   d. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{xy}{(x+y)}}}$

8. Dapatkan penyelesaian dari persamaan berikut ini.

   a. $(\frac{1}{2})^{2x} = 16$
   b. $3^{-x} = 81$
   c. $64^{2x} = \frac{1}{4}$
   d. $4^{2x-1} = (\frac{1}{2})^{2x}$
   e. $5^{x-4} = 125$
   f. $2^{2x}4^{x-3} = \sqrt[4]{243}$

9. Dapatkan semua nilai dari persamaan berikut ini.

   a. $x^3 = 4096$
   b. $x^4 = 4096$
   c. $x^5 = -1024$
   d. $(x^2)^{\frac{3}{4}} = 8$
   e. $(x^2)^{\frac{3}{2}} = 64$
   f. $x^2x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{243}$

## 1.6 LOGARITMA

Pada modul ini dibahas mengenai kebalikan dari pemangkatan yang disebut logaritma. Dengan logaritma, perhitungan dengan bilangan yang sangat besar dapat disederhanakan. Perkalian dapat dihitung dengan penjumlahan dan pembagian dapat dihitung menggunakan pengurangan. Diuraikan pula, semua sifat-sifat operasi aljabar dari logaritma tersebut.

### 1.6.1 PENGERTIAN LOGARITMA

Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai arti bilangan berangkat, misalnya $a^p = b$, dan permasalahannya adalah mencari bilangan $b$ jika $a$ dan $p$ diketahui. Sekarang akan dibahas mengenai permasalahan menentukan bilangan $p$ jika $a$ dan $b$ diketahui. Permasalahan demikian yang merupakan permasalahan logaritma. Perhatikan definisi berikut ini.

**DEFINISI 1.6.1 :**

Untuk $b$ bilangan positif dan $b \neq 1$, arti dari ${}^{b}\log a = x$ adalah $b^x = a$

Berkaitan dengan pengertian logaritma pada definisi di atas, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan.

(a) Bilangan $b$ disebut ***basis*** atau ***bilangan pokok*** logaritma, dan $x$ disebut hasil logaritma.

(b) Bilangan $b$ dipilih positif. Jika $b$ negatif dan dipangkatkan dengan bilangan rasional, maka tidak selalu menghasilkan bilangan real.

(c) Karena $b$ positif dan $x$ real, nilai $b^x > 0$. Karena $a = b^x$, berarti $a$ juga harus positif.

(d) Nilai $b$ harus tidak sama dengan 1, sebab untuk sembarang $x$ maka nilai $1^x = 1$.

(e) Gantilah $x$ pada ekspresi $b^x = a$ dengan ${}^{b}\log a = x$ akan diperoleh $b$.

$$b^{{}^b\log a} = a$$

Penulisan ${}^b\log a$ sering ditulis dalam bentuk $\log_b a$.

(f) Karena $b^0 = 1$ untuk $b > 0$, maka ${}^b\log 1 = 0$.

CONTOH 1.6.1

a. $\log_{10} 100 = 2$, karena $10^2 = 100$

b. $\log_2 16 = 4$, karena $2^4 = 16$

c. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$, karena $16^{1/4} = 2$

d. $\log_{10} 0{,}1 = -1$, karena $10^{-1} = 0{,}1$

e. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, karena $2^{-3} = 1/8$

CONTOH 1.6.2:

Tentukan nilai logaritma berikut ini.

a. $\log_{10} 10.000$ b. $\log_3 243$ c. $\log_2 0{,}25$

Penyelesaian:

a. Untuk mencari nilai $\log_{10} 10.000$, sama halnya kita mencari jawaban atas pertanyaan "10 dipangkatkan berapakah agar sama dengan 10.000?". Jawabannya adalah 4, atau $10^4 = 10.000$.
Oleh karena itu, $\log_{10} 10.000 = 4$.

b. Untuk mencari nilai $\log_3 243$, sama halnya kita mencari jawaban atas pertanyaan "3 dipangkatkan berapakah agar sama dengan 243?". Jawabannya adalah 5, atau $3^5 = 243$.
Oleh karena itu, $\log_3 243 = 5$.

Kita juga dapat mencari nilai log dari suatu bilangan dengan cara memfaktorkan bilangan tersebut menjadi perkalian basis dari logaritmanya. Karena 243 = 3 × 3 × 3 × 3 × 3 = $3^5$, maka $\log_3 243 = 5$.

c. Karena 0,25 = ¼ = $4^{-1}$ = $2^{-2}$, maka $\log_2 0{,}25 = -2$

Tidak semua logaritma dapat dicari hasilnya dengan mudah seperti contoh di atas. Misalnya $\log_{10} 2$ tidak dapat dicari menggunakan cara seperti di atas. Nilai tersebut dapat dicari menggunakan tabel atau kalkulator. Selain itu, perhatikan bahwa karena $b > 0$, berapapun nilai $x$ akan menghasilkan $b^x$ yang selalu positif. Dengan demikian logaritma terdefinisi hanya untuk bilangan positif.

### 1.6.2 MENGHITUNG LOGARITMA

Logaritma adalah kebalikan dari proses pemangkatan, untuk itu diawali bagian ini dengan mengulang singkat sifat-sifat perpangkatan. Misalkan akan digambarkan grafik pangkat dengan menghitung nilai-nilai pangkat sebanyak mungkin. Untuk menggambarkan sketsa grafik $y = 2^x$, dapat dihitung beberapa nilai $y$ untuk nilai-nilai $x$ seperti dalam tabel berikut ini:

| $x$ | ... | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | ... | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | ... |

Tentu saja dapat dihitung lebih banyak nilai $y$ untuk mendapatkan sketsa grafik yang lebih tepat (halus). Dari tabel di atas dapat diamati beberapa sifat berikut:

(a) Untuk $x$ makin besar, nilai $2^x$ juga makin besar dan $2^x > x$.

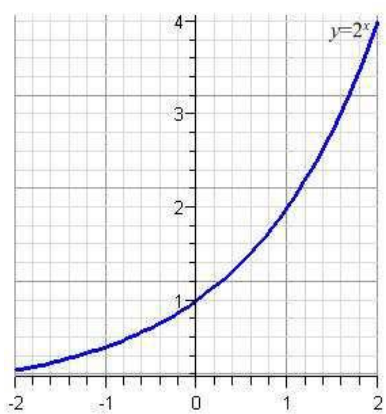
(b) Untuk $x$ makin kecil (negatif), nilai $2^x$ makin kecil menuju nol.

(c) Untuk sembarang $x$, nilai $2^x > 0$.

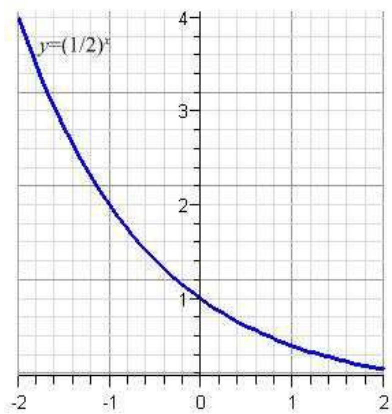
(d) Untuk $x = 0$, nilai $2^x = 1$.

(e) Jika $x_1 < x_2$, nilai $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Berdasarkan nilai-nilai pada tabel dan sifat di atas, $y = 2^x$ dapat disketsakan seperti Gambar 1.6.1. Gambar tersebut merupakan pola dari grafik $y = a^x$ dengan $a > 1$.




Gambar 1.6.1 Grafik $y = 2^x$



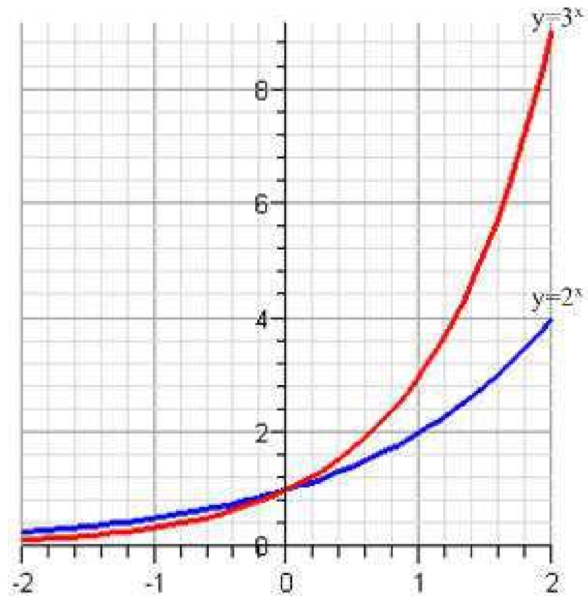

Gambar 1.6.2 Grafik $y = (\frac{1}{2})^x$

Dengan cara yang sama, sketsa grafik $y = (\frac{1}{2})^x$ dapat digambarkan seperti Gambar 1.6.2. Sketsa grafik $y = (\frac{1}{2})^x$ merupakan pola dari grafik $y = a^x$ dengan $0 < a < 1$.

Untuk memberikan gambaran mengenai grafik $y = a^x$ untuk $a$ yang lain, perhatikan sifat berikut ini. Misal a > b, berlaku.

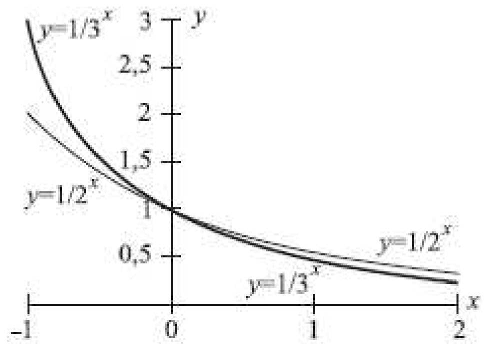
(a) untuk $x > 0$, maka $a^x > b^x$.

(b) untuk $x < 0$, maka $a^x < b^x$.



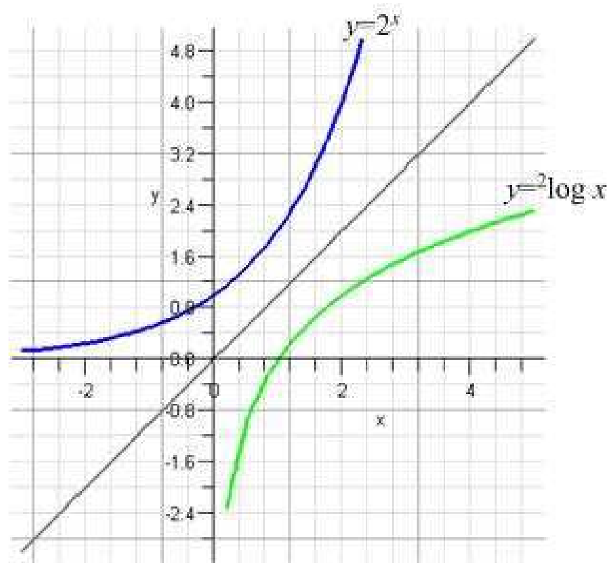

Gambar 1.6.3 Grafik $y = 2^x$ dan $y = 3^x$

Berdasarkan informasi ini dapat digambarkan sketsa grafik $y = a^x$. Misalnya perbedaan grafik $y = 2^x$ dan $y = 3^x$ dapat dilihat pada Gambar 1.6.3. Perhatikan bahwa untuk $x > 0$ maka $2^x < 3^x$ dan untuk $x < 0$ maka $2^x > 3^x$. Sedangkan Gambar 1.6. menunjukkan perbedaan antara grafik y = $(\frac{1}{2})^x$ dan y = $(\frac{1}{3})^x$.

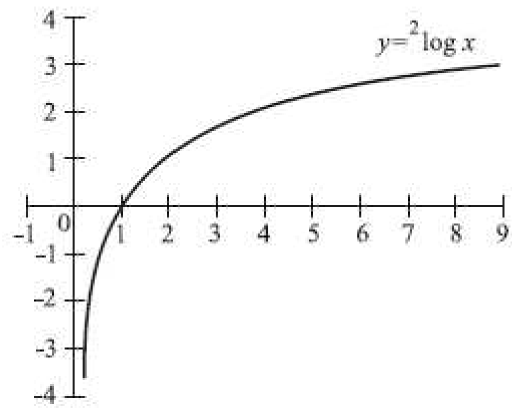



Gambar 1.6.4 Grafik $y = (\frac{1}{2})^x$ dan $y = (\frac{1}{3})^x$

Grafik logaritma dapat dicari dari gafik pangkat. Misalnya, untuk mendapatkan gafik $y = \log_2 x$ dapat diperoleh dari pencerminan grafik $y = 2^x$ terhadap garis $y = x$ (lihat Gambar 1.6.). Secara terpisah ditunjukkan grafik $y = \log_2 x$ pada Gambar 1.6..




Gambar 1.6.5 Grafik Logaritma




Gambar 1.6.6 Sketsa Grafik Logaritma

Dari grafik-grafik tersebut dapat dicari nilai logaritma dengan ketepatan terbatas. Sebagai contoh, dari grafik pada Gambar 1.6.6, jika ditarik garis *y* = 3 yang memotong grafik kira-kira di titik dengan *x* = 1,6. Hal ini berarti

$\log_2 3 \approx 1{,}6$ (≈ dibaca 'hampir sama dengan')

Secara umum, untuk mendapatkan nilai $\log_2 a$ dapat diikuti gambaran yang diberikan pada Gambar 1.6.6.

Sifat yang lain dari logaritma diberikan berikut ini.

- Untuk sembarang bilangan $b > 1$, dan $0 < p < q$, berlaku

$$\log_b p < \log_b q$$

- Untuk $0 < b < 1$ dan $0 < p < q$, berlaku

$$\log_b p > \log_b q$$

Uraian berikut ini memberikan gambaran menghitung $\log_2 3$ berdasarkan sifat di atas.

Diketahui bahwa

$$2 < 3 < 2^2 \qquad (1.6.3)$$

karena $\log_2 2$ = 1 dan $\log_2 2^2$ = 2, maka 1 < $\log_2 3$ < 2.

Jadi $\log_2 3$ = 1,...

Untuk mendapatkan angka ke-dua dari $\log_2 3$ diperlukan nilai perpangkatan dari 2 oleh 0,1 ; 0,2 ; dan seterusnya.

Tabel 1.6.1

| $x$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 1,07 | 1,15 | 1,23 | 1,32 | 1,41 | 1,51 | 1,62 | 1,74 | 1,86 |

Selanjutnya, dengan membagi 2 pertidaksamaan(1.6.3) diperoleh

$$1 < 1{,}5 < 2$$

dan berdasarkan tabel perpangkatan dari 2 di atas diketahui bahwa 1,5 terletak di antara

$$2^{0,5} = 1{,}41 < 1{,}5 < 1{,}51 = 2^{0,6} \qquad (1.6.4)$$

Untuk mendapatkan kembali angka 3, kalikan pertidaksamaan (1.6.4) dengan 2 dan diperoleh

$$2^{1,5} < 3 < 2^{1,6}$$

dan ini berarti bahwa

$$1{,}5 < \log_2 3 < 1{,}6$$

Untuk mendapatkan ketepatan yang lebih tinggi, harus dihitung $2^{0,01}$, $2^{0,02}$, dan seterusnya.

Karena $2^x > 1$ untuk setiap $x > 0$, maka pertidaksamaan (1.6.4) dapat dibagi dengan 1,41 dan diperoleh

$$1 < 1{,}064 < 1{,}134351773$$

Seperti sebelumnya, dihitung nilai-nilai seperti dalam Tabel 1.6.2.

Tabel 1.6.2

| $x$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 1,0070 | 1,0140 | 1,0210 | 1,0281 | 1,0353 | 1,0425 | 1,0498 | 1,0570 | 1,0644 |

Perhatikan bahwa 1,064 terletak di

$$2^{0,08} = 1{,}0570 < 1{,}064 < 1{,}0644 = 2^{0,09}$$

dan untuk mendapatkan kembali angka 3, dikalikan ketaksamaan tersebut dengan $1{,}41 = 2^{0,05}$ dan kemudian dengan $2 = 2^1$ (angka yang digunakan untuk membagi) sehingga diperoleh

$$2^{1+0,5+0,08} < 3 < 2^{1+0,5+0,09}$$

Hal ini berarti bahwa

$$1{,}58 < \log_2 3 < 1{,}59$$

Dengan demikian

$\log_2 3$ = 1,58…

Tahapan ini dapat dilanjutkan untuk mendapatkan nilai hampiran dengan ketepatan sesuai yang diinginkan. Karena diketahui bahwa $\log_2 3$ < 1,59, berati $\log_2 3 \approx$ 1,585 lebih baik dibandingkan dengan $\log_2 3 \approx$ 1,58.

## CONTOH 1.6.3

Dengan menggunakan tabel pangkat yang telah dibuat di atas, hitunglah $\log_2 5$.

Penyelesaian:

- Karena $2^2 = 4 < 5 < 2^3$, berarti $\log_2 5$ = 2,…
- Ketaksamaan tersebut dibagi dengan $2^2 = 4$, dan diperoleh

  $1 < 1{,}25 < 2$

  Selanjutnya menggunakan Tabel 1.6.1, diketahui bahwa 1,25 terletak

  $2^{0,3} = 1{,}23 < 1{,}25 < 1{,}32 = 2^{0,4}$

  Dengan mengalikan ketaksamaan terakhir dengan $2^2$ diperoleh

  $2^{2+0,3} < 5 < 2^{2+0,4}$

  Ini berarti $\log_2 5$ = 2,3… .

- Untuk memperoleh ketepatan yang lebih baik, ketaksamaan 1,23 < 1,25 dibagi dengan 1,23 dan diperoleh 1 < 1,0163 dan selanjutnya berdasarkan Tabel 1.6.2, diketahui bahwa 1,0163 terletak

  $2^{0,02} = 1{,}0140 < 1{,}0163 < 1{,}0210 = 2^{0,03}$

Dengan mengalikan dengan $2^{2+0,3}$ diperoleh

$2^{2+0,3+0,02} < 5 < 2^{2+0,3+0,03}$

dan ini berarti $\log_2 5$ = 2,32…. Untuk ketepatan tiga angka di belakang koma, berarti $\log_2 5 \approx 2{,}325$.

### 1.6.3 SIFAT – SIFAT LOGARITMA

Sebagaimana telah diuraikan pada subbab sebelumnya, bahwa logaritma dapat diturunkan dari perpangkatan. Dengan pemahaman tersebut, sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk mendapatkan sifat-sifat logaritma seperti berikut ini.

i. Jika $b > 0$, $b \neq 1$, $p > 0$ dan $q > 0$, maka

$$\log_b p \times q = \log_b p + \log_b q$$

ii. Jika $b > 0$, $b \neq 1$, $p > 0$ dan $q > 0$, maka

$$\log_b \frac{p}{q} = \log_b p - \log_b q$$

iii. Jika $b > 0$, $b \neq 1$, $p > 0$ dan $q > 0$, maka

$$\log_b p = \frac{\log_b p}{\log_b q}$$

iv. Jika $b > 0$, $b \neq 1$, $p$ real, dan $q$ rasional, maka

$$\log_b p^q = q \log_b p$$

## CONTOH 1.6.4

Misal diketahui $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ dan $\log_{10} 3 = 0{,}4771$, tentukan $\log_{10} 6$.

Penyelesaian:

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \times 3$$

$$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

= 0,3010 + 0,4771

= 0,7781

## CONTOH 1.6.5

Misal diketahui $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ dan $\log_{10} 3 = 0{,}4771$, tentukan $\log_{10} 1{,}5$

dan $\log_{10} 0{,}6666 \ldots$ .

Penyelesaian:

- $\log_{10} 1{,}5 = \log_{10} \frac{3}{2}$

  $= \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

  = 0,4771 – 0,3010

  = 0,1761

- $\log_{10} 0{,}6666 \ldots = \log_{10} \frac{2}{3}$

  $= \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

  = 0,3010 - 0,4771

  = - 0,1761

CONTOH 1.6.6

Misal diketahui $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ dan $\log_{10} 3 = 0{,}4771$, dapatkan $\log_2 3$ dan $\log_3 2$.

Penyelesaian:

- $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = 1{,}58505$
- $\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{0{,}3010}{0{,}4771} = 0{,}6309$

CONTOH 1.6.7

Misal diketahui $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, dapatkan $\log_{10} 16$.

Penyelesaian:

$$\log_{10} 16 = \log_{10} 2^4 = 4\log_{10} 2 = 4\ (0{,}3010) = 1{,}2040$$

### 1.6.4 CONTOH PEMAKAIAN LOGARITMA

Pada subbab ini, akan disajikan contoh-contoh pemakaian logaritma, diantaranya: untuk mengalikan bilangan, mebagi bilangan, menghitung pangkat suatu bilangan.

CONTOH 1.6.8

Dengan menggunakan logaritma, hitunglah pendekatan $1{,}5 \times 0{,}6666$

Penyelesaian:

Misal $x = 1{,}5 \times 0{,}6666$

$$\log_{10} x = \log_{10}(1{,}5 \times 0{,}6666) \log_{10} 1{,}5 + \log_{10} 0{,}6666$$

$$= 0{,}1761 - 0{,}1761 = 0$$

$$x = 10^0 = 1$$

CONTOH 1.6.9

Dapatkan nilai *x* yang memenuhi $2^x = 3$.

Penyelesaian:

$$2^x = 3$$

Sebelah kiri dan kanan tanda sama dengan dikenakan operasi $\log_2$

$$\log_2 2^x = \log_2 3$$

$$x \log_2 2 = \log_2 3$$

$$x = \log_2 3 = 1{,}58505$$

(berdasarkan contoh 1.6.6, $\log_2 3$ = 1,58505)

## CONTOH 1.6.10

Dana Rp 100.000.000 dideposito dengan bunga 10 % per tahun. Perhitungan 9 tahun kemudian menggunakan rumusan.

$$M_9 = M_0(1+0{,}1)^9$$

Tentukan besarnya dana pada akhir tahun ke 9.

Penyelesaian:

$$M_9 = 100.000.000(1+0{,}1)^9$$

$$\Longrightarrow\ M_9 = 10^8(1+0{,}1)^9$$

$$\Longrightarrow\ \log_{10} M_9 = 8 + 9 \times \log_{10} 1{,}1$$

$= 8 + 9 \times 0{,}041393 = 8{,}372534$

(disini $\log_{10} 1{,}1$ dihitung berbantuan kakulator, karena sebelumnya tidak ada contoh penghitungan untuk $\log_{10} 1{,}1$ ; atau dapat berbantuan tabel logaritma)

$$\Longrightarrow\ M_9 = 10^{8{,}372534} = 235.794.769$$

## CONTOH 1.6.11

Persamaan untuk menghitung nilai tunai (*present value/PV*) dari anuitas biasa adalah

$$PV = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Dengan :

*R* adalah pembayaran periodik dari anuitas.

*i* adalah laju bunga per periode bunga.

*n* adalah jumlah interval pembayaran

Jika diinginkan mencapai nilai tertentu di masa mendatang (*Future value/ FV*), maka tentukan rumusan berapa lama untuk mencapainya.

Penyelesaian:

Persamaan pada contoh ini, *PV* digantikan dengan *FV* menjadi

$$FV = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Kita akan mencari nilai *n,* berapa lama untuk mendapatkan nilai yang akan datang yang diinginkan.

Kenakan operasi log pada kedua sisi persamaan, diperoleh

$$log_{10}FV = log_{10}\left(R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$\Rightarrow\ log_{10}FV = log_{10}R + log_{10}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$\Rightarrow log_{10}\frac{FV}{R} = log_{10}(1-(1+i)^{-n}) - log_{10}i$$

$$\Rightarrow log_{10}\left(\frac{FV}{R}i\right) = log_{10}(1-(1+i)^{-n})$$

$$\Rightarrow (1+i)^{-n} = 1-\frac{FV}{R}i$$

$$\Rightarrow n = \frac{log_{10}\left(1+\frac{FV}{R}i\right)}{log_{10}(1+i)}$$

## • RANGKUMAN

- Untuk *b* bilangan positif dan *b* ≠ 1, arti dari ${}^{b}\log a = x$ adalah $b^x = a$.
- Jika b > 0, b≠1, p > 0 dan q > 0, maka berlaku :

6. $\log_b p \times q = \log_b p + \log_b q$

7. $\log_b \frac{p}{q} = \log_b p - \log_b q$

8. $\log_b p = \frac{\log_b p}{\log_b q}$

9. $\log_b p^q = q \log_b p$

## SOAL LATIHAN 2-6

1. Tentukan nilai dari logaritma berikut ini.

   a. $\log_2 64$ b. $\log_5 625$

   c. $\log_2 \frac{1}{128}$ d. $\log_{25} 125$

   e. $\log_{10} 10.000$ f. $\log_{10} 0{,}00001$

2. Tentukan nilai dari logaritma berikut ini.

   a. $\log_2 \sqrt{64}$ b. $\log_{1/2} 64$

   c. $\log_5 \frac{1}{125}$ d. $\log_{1/2} \frac{1}{64}$

   e. $2^{\log_2 512}$ f. $10^{\log_{10} 0{,}0001}$

3. Dengan mengikuti cara pada Contoh 1.6.4, hitunglah logaritma di bawah ini sampai ketepatan dua angka di belakang koma.

   a. $\log_2 6$ b. $\log_2 7$

   c. $\log_2 10$ d. $\log_2 15$

   e. $\log_2 25$ f. $\log_2 75$

4. Jika dipunyai tabel seperti berikut ini

| $x$ | $0,1$ | $0,2$ | $0,3$ | $0,4$ | $0,5$ | $0,6$ | $0,7$ | $0,8$ | $0,9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^x$ | $1,259$ | $1,585$ | $1,995$ | $2,512$ | $3,162$ | $3,981$ | $5,012$ | $6,309$ | $7,943$ |

   Maka hitunglah logaritma di bawah ini sampai ketepatan satu angka di belakang koma.

   a. $\log_{10} 2$ b. $\log_{10} 3$

   c. $\log_{10} 4$ d. $\log_{10} 5$

   e. $\log_{10} 11$ f. $\log_{10} 12$

5. Jika $\log_{10} 2 = 0{,}3010$ dan $\log_{10} 3 = 0{,}4771$ , maka hitunglah

   a. $\log_{10} 24$ b. $\log_{10} 1{,}5$

   c. $\log_{10} 15$ d. $\log_{10} 4{,}5$

e. $\log_{10} 45$ f. $\log_{10} 18$

6. Jika $\log_{10} 16 = 1{,}20412$, maka hitunglah

   a. $\log_{10} 1600$ b. $\log_{10} 2$

   c. $\log_{10} 256$ d. $\log_{10} 32$

   e. $\log_{16} 10$ f. $\log_{16} 2$

7. Jika $\log_8 5 = 0{,}7740$ dan $\log_8 6 = 08616$ , maka hitunglah

   a. $\log_8 30$ b. $\log_8 36$

   c. $\log_8 150$ d. $\log_8 750$

   e. $\log_8 1{,}2$ f. $\log_8 7{,}2$

8. Jika $\log_{16} 5 = x$, maka hitunglah

   a. $\log_2 25$ b. $\log_4 \sqrt[3]{5}$

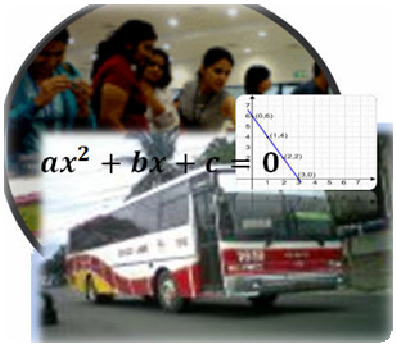
   c. $\log_5 16$ d. $\log_{25} 64$

9. Dengan menyamakan basis logaritma, hitunglah

   a. $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5$ b. $\log_3 8 \times \log_5 9 \times \log_2 7$

10. Tentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan berikut ini.

    a. $\log_8 x - \log_x 8 - 6 = 0$ b. $\log_{2x-1} 3 - 4\log_3(2x-1) + 3 = 0$




Bab

2

# PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

2. Persamaan Dan Pertidaksamaan

Persamaan atau pertidaksamaan merupakan suatu bentuk model matematik yang dibangun dari dunia nyata sebagai bentuk hubungan perwujudan dari alam pikir terhadap suatu masalah. Setiap model persamaan atau pertidaksamaan harus memuat unsur-unsur yang merupakan abstraksi dari kenyataan masalah tersebut.

Model yang berbentuk persamaan atau pertidaksamaan merupakan struktur dari suatu masalah yang mengandung peubah-peubah atau parameter yang dianalisis atau diselesaikan dengan menggunakan operasi matematika.

Pada kenyataannya persamaan atau pertidaksamaan yang muncul dari fenomena nyata dapat berbentuk linear atau tak linear. Akan tetapi, pada buku ajar ini akan dibahas bentuk linear dan kuadrat. Berikut ini beberapa ilustrasi permasalahan yang ada di kehidupan sehari-hari.

a. Satu rombongan bus wisata mengunjungi obyek wisata, biaya yang harus dikeluarkan untuk memasuki obyek wisata tersebut sebesar Rp 150.000 per bus. Jika dalam satu bus ada 30 orang, maka berapa biaya masuk objek wisata per orang ?.

b. Perusahaan roti memproduksi 500 bungkus roti setiap hari. Roti terdiri dari tiga jenis, yaitu: roti keju, roti cokelat, dan roti daging. Setiap roti keju diproduksi paling sedikit 50 bungkus, roti cokelat paling sedikit 100 bungkus, dan roti daging paling sedikit 70 bungkus. Permasalahan ini dapat dimodelkan dalam bentuk pertidaksamaan. Jika keuntungan dari tiap-tiap jenis roti diketahui, maka berapakah banyaknya tiap-tiap jenis harus diproduksi agar memberikan keuntungan yang sebesar-besarnya.

## 2.1 PERSAMAAN LINEAR

Persamaan dikatakan linear jika pangkat dari peubah adalah 1, seperti:

1. $2x + 5 = 8$
2. $5y = 20$
3. $7x + 6y = 10$

Selain banyaknya peubah pada persamaan linear juga dapat ditinjau dari banyaknya persamaan linear yang muncul secara serentak disebut sistem persamaan linear, misalnya:

1. $\begin{aligned} 2x + 3y &= -2 \\ x + 2x &= 3 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + 2y + z &= -1 \\ -x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x - y + 2z - u &= 0 \\ x + 2y - u &= 0 \\ y - z + u &= 0 \\ z - u &= 0 \end{aligned}$

Dari bentuk–bentuk persamaan linear tersebut, dapat dilakukan hal-hal sebagai berikut :

1. Mendapatkan penyelesaian persamaan, yaitu mendapatkan nilai-nilai peubah yang memenuhi persamaan tersebut.

2. Menggambar grafik dari persamaan, khususnya untuk sistem persamaan dengan 2 peubah .

### 2.1.1 PERSAMAAN LINEAR SATU PEUBAH

Persamaan linear satu peubah secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$ax + b = c \qquad (2.1.1)$$

dengan $a \neq 0$, $b$, dan $c \in R$.

Penyelesaian dari persamaan (2.1.1) adalah nilai $x$ yang memenuhi persamaan tersebut, misalnya.

a. $2x + 3 = 7$, untuk $x = 2$ didapat $2(2) + 3 = 7$. Berarti $x = 2$ merupakan penyelesaian dari persamaan tersebut.
b. $2x + 3 = 5$ , jika diberikan $x = 1$, maka diperoleh $2(1) + 3 = 5$. yang berarti $x = 1$ merupakan penyelesaian dari persamaan tersebut.

**■ Mencari Penyelesaian Persamaan Linear Satu Peubah**

Perhatikan persamaan $ax + b = c$. Kedua ruas dikurangi dengan b, diperoleh

$$ax + b - b = c - b$$

$$ax + 0 = c - b \text{ atau } ax = c - b.$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{a}$ diperoleh

$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(c - b)$ , atau

$$x = \frac{c-b}{a} \quad (2.1.2)$$

Himpunan penyelesaiannya adalah : $\left\{\frac{c-b}{a} \middle| a, c, b \in R \text{ dan } a \neq 0\right\}$

Dari uraian tersebut diatas, terdapat langkah- langkah dalam mencari penyelesaian persamaan linear 1 peubah $ax + b = 0$ sebagai berikut.

**Langkah 1 :** Kedua ruas dikurangi dengan *b*.

**Langkah 2 :** Kedua ruas dikalikan dengan kebalikan dari koefisien peubah *x* yang pada persamaan tersebut adalah *a*.

CONTOH 2.1.1

Selesaikan persamaan $3x - 7 = 9$ ?.

Penyelesaian:

$3x - 7 = 9$

$3x + (-7) = 9$ kedua ruas dikurangi $-7$

$3x + (-7) - (-7) = 9 - (-7)$

diperoleh

$3x = 16$,

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan kebalikan 3 yaitu $\frac{1}{3}$ diperoleh

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(16)$$

atau $x = \frac{16}{3}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{16}{3}\}$.

## CONTOH 2.1.2

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan $7 = 5 + 2x$ ?

Penyelesaian:

| | |
|---|---|
| $7 = 5 + 2x$ | kedua ruas dikurangi 5 |
| $-5 + 7 = -5 + 5 + 2x$ | diperoleh |
| $2 = 2x$, | |

kedua ruas dikalikan dengan kebalikan 2 yaitu $\frac{1}{2}$ diperoleh

$$\frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}(2x)$$

atau $x = 1$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1\}$.

## CONTOH 2.1.3

Dapatkan nilai peubah $t$ yang memenuhi $\frac{2}{5}t - 7 = -6$ ?.

Penyelesaian :

$\frac{2}{5}t - 7 = -6$ kedua ruas ditambah 7

$\frac{2}{5}t - 7 + 7 = -6 + 7$ diperoleh

$\frac{2}{5}t = 1,$

kedua ruas dikalikan dengan kebalikan dari $\frac{2}{5}$ yaitu $\frac{1}{2/5} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}(\frac{2}{5}t) = \frac{5}{2}(1)$ atau $t = \frac{5}{2}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{5}{2}\}$

## CONTOH 2.1.4

Selesaikan persamaan $3y - 8 = 9 + 5y$ ?

Penyelesaian:

$3y - 8 = 9 + 5y$

kelompokkan $y$ pada ruas kiri dan yang tidak mengandung $y$ pada ruas kanan. Kurangi kedua ruas dengan $-5y$ dan menambah kedua ruas dengan 8:

$-5y + 3y - 8 + 8 = 9 + 5y - 5y + 8$ , diperoleh

$-2y = 9 + 8$ atau

$-2y = 17$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan kebalikan dari –2 yaitu $\frac{1}{-2}$

$\frac{1}{-2}(-2y) = \frac{1}{-2}(17)$, diperoleh

$y = -\frac{17}{2}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{17}{2}\}$

CONTOH 2.1.5

Dapatkan nilai $u$ yang memenuhi persamaan $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}u = 3u - \frac{1}{3}$ ?.

Penyelesaian:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}u = 3u - \frac{1}{3},$$

kelompokkan $u$ pada ruas kiri dan yang tidak mengandung $u$ pada ruas kanan yaitu dengan mengurangi kedua ruas dengan -3$u$ dan menambah kedua ruas dengan $-\frac{2}{3}$.

$-3u + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}u - \frac{2}{3} = -3u + 3u - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ diperoleh

$-\frac{11}{4}u = -1$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan kebalikan dari $-\frac{11}{4}$ yaitu

$\frac{1}{-11/4} = -\frac{4}{11}$.

$$-\frac{4}{11}\left(-\frac{11}{4}u\right) = -\frac{4}{11}(-1) \text{ atau}$$

$$u = \frac{4}{11},$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{4}{11}\}$.

## 2.1.2 PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

Persamaan linear dua peubah secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$ax + by = c \qquad (2.1.3)$$

dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \in R$.

Pandang persamaan linear dua peubah

$$2x + 3y = 6 \qquad (2.1.4)$$

Mari kita amati seperti berikut ini.

1. Misal diambil suatu nilai $x = 0$ diperoleh $y = 2$. Ini berarti bahwa pasangan nilai $x = 0$ dan $y = 2$ memenuhi persamaan (2.1.4) atau dengan kata lain pasangan (0,2) merupakan penyelesaian dari persamaan (2.1.4).

2. Misal diambil lagi, suatu nilai $x = 1$ diperoleh $y = 4/3$. Ini berarti bahwa pasangan nilai $x = 1$ dan $y = 4/3$ memenuhi persamaan (2.1.4). Jadi pasangan (0,2) merupakan penyelesaian dari persamaan (2.1.4).

Dari pengamatan di atas, nilai $x$ bisa diambil berapa saja, akan didapat nilai untuk $y$. Oleh karena itu, persamaan (2.1.4) mempunyai banyak penyelesaian. Penyelesaian dari persamaan (2.1.4) berupa pasangan $(x,y)$ yang memenuhi persamaannya.

Secara umum, persamaan (2.1.3) mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian yang berbentuk $(x,y)$.

Jadi, himpunan penyelesaian dari (2.1.3) adalah

$$\{(x,y) \mid ax + by = c\}$$

## CONTOH 2.1.6

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $3x + 4y = 2$ ?

Penyelesaian:

Oleh karena $x, y \in R$ maka nilai $x$ dan $y$ yang memenuhi persamaan tersebut ada tak berhingga banyak.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{ (x , y) \mid 3x + 4y = 2 , x, y \in R\}$

## CONTOH 2.1.7

Dapatkan nilai $u$ yang memenuhi persamaan $4u - 2v = -5$ jika diberikan $v = 2$

Penyelesaian:

$4u - 2v = -5$ ,

untuk $v = 2$ diperoleh $4u - 2(2) = -5$.

| | |
|---|---|
| $4u - 4 = -5$ | kedua ruas ditambah 4. |
| $4u - 4 + 4 = -5 + 4$ | diperoleh |
| $4u = -1$ | kedua ruas dibagi 4 . |
| $u = -1/4$. | |

Himpunan penyelesaiannya adalah : { -1/4 }

## CONTOH 2.1.8

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan $2x + 3y = 4x - 8$ jika $y = -3$.

Penyelesaian:

$2x + 3y = 4x - 8$ , untuk y = -3 diperoleh

$2x + 3(-3) = 4x - 8$

$2x - 9 = 4x - 8$

pengelommpokkan pada kedua ruas.

$2x - 4x = -8 + 9$ atau

$-2x = 1$ , kedua ruas dibagi – 2

Diperoleh $x = -1/2$

## CONTOH 2.1.9

Selesaikan persamaan berbentuk $5t - 3s + 10 = 3s - 4t - 5$ jika $s = -1$ ?

Penyelesaian:

$5t - 3s + 10 = 3s - 4t - 5$, untuk $s = -1$ diperoleh

$5t - 3\,(-1) + 10 = 3(-1\,) - 4t - 5$ atau

$5t + 3 + 10 = -3 - 4t - 5$ atau

$5t + 13 = -8 - 4t$ , pengelompokkan pada kedua ruas.

$5t + 4t = -8 - 13$ , atau

$9t = -21$ , kedua ruas dibagi 9

$t = -21/9$

Himpunan penyelesaiannya adalah : {-21/9}

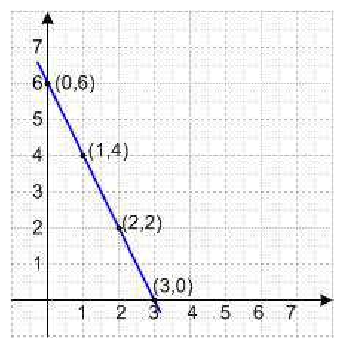
## CONTOH 2.1.10

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan linear $2x + y = 6$ jika $x$, $y$ bilangan bulat positif ?

Penyelesaian:

Dari persamaan $2x + y = 6$, dapat diperoleh nilai – nilai $x$ dan $y$ :

Untuk $x = 0$ maka $y = 6$
Untuk $x = 1$ maka $y = 4$
Untuk $x = 2$ maka $y = 2$
Untuk $x = 3$ maka $y = 0$



## RANGKUMAN

- Persamaan linear satu peubah $ax + b = c$ dengan $a \neq 0$, $b$, dan $c \in R$ mempunyai:
  - penyelesaian $x = \frac{c-b}{a}$
  - himpunan penyelesaian $\left\{\frac{c-b}{a} \middle| a \neq 0, c, b \in R\right\}$
- Persamaan linear dua peubah dinyatakan sebagai

  $ax + by = c$ dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \in R$. Dan mempunyai

  himpunan penyelesaian $\{(x, y) | ax + by = c\}$

## SOAL LATIHAN 2-1

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini.

   a. $2 + \frac{4}{5}t = 7t - 8$

   b. $3s - 7 = \frac{1}{3} - 4s$

   c. $\frac{2}{d} - 2 = \frac{4}{d}t + 5$

   d. $7x - 6 = 8 + 8x$

   e. $\frac{4}{y} - \frac{7}{y} = 6$

   f. $7(4 - 5/p) = 8$

   g. $7(4+5/p) = 8$

   h. $\frac{3}{2b-4} = \frac{7}{4+4b}$

2. Selesaikan persamaan berikut ini.

   a. $3 - 2/x = 4 + 3/x$

   b. $6k - 4 = 4 - 6k$

   c. $7 + 8h = -7 - 8h$

   d. $\frac{3}{u-2} = \frac{3}{2-u}$

e. $\frac{4t+6}{4} = \frac{6-4t}{4}$ f. 3$y$+2/3 =9$y$-2/3

3. Dapatkan himpunan semua penyelesaian dari persamaan berikut ini.
   a. 4$x$ + 5 = 5$y$ -4 b. 5$y$ +3$x$ = 7
   c. 7$x$ - 7 = 7-7$x$ d. 5(3$x$ - 2) = 10 15$y$
   e. $\frac{2}{3x-4} = \frac{3}{4-3y}$ f. $\frac{3}{4x+2} = \frac{2}{2y-3}$

4. Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut untuk $s$ = 1.

   a. 2s + 4 = 4 – 5t. b. $8 - \frac{2s}{t} = 4s + \frac{4s}{5t}$

   c. $s \mid 8 = \frac{4}{2t} \quad 6$ d. $\frac{5t}{7} - 6 = \frac{4s}{5} + 5$

   e. $\frac{3}{6t-4} = \frac{2}{4+4s}$ f. 4 ( 2t + 3s ) = 8 t + 8

   g. $\frac{4}{3t} - \frac{2}{2s} = \frac{1}{4t} - 5$ h. $\frac{5t-2s}{3t} = \frac{4s+4}{6}$

5. Selesaikan persamaan berbentuk.
   a. 2$x$ + 4$y$ – 6 = 5 untuk $x$=2.

   b. $4t + 5s = \frac{2s}{3t} + 4t$ untuk $t$ = -2

   c. $7u - \frac{3}{v} = 4v + \frac{3u}{4v} - 8$ untuk $v$=-2

   d. $\frac{5p-q}{2p} = \frac{4q+4}{6}$ untuk $q = \frac{1}{2}$

   e. $4(2n + 3m) = 8m + 8$ untuk $n$=$x$

f . $\frac{2h}{x} - \frac{h}{x} = \frac{7}{8}$ untuk $h = y$

6. Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini dengan grafik.

   a. $4x - 3y + 4 = 5$ untuk semua bilangan $x$, $y$ riil

   b. $u - \frac{3}{v} = 3v - \frac{3u}{2v} + 8$ untuk $v = 1$ dan $u$ bilangan bulat

   c. $4m - 3n = \frac{2}{3m} + 5n - 6$ untuk $m$ bilangan ganjil dan $n$ bilangan bulat positif.

   d. $4t - 5s = \frac{2s}{3t} + 4s$ untuk $t$ real negatip dan $s$ bilangan sembarang.

   e . $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3x+2y-7}{xy}$ untuk $x = 1$ dan $y$ bilangan cacah

   f. $\frac{2y}{z} - \frac{2}{z} = \frac{7}{8}$ untuk $y$ bilangan ganjil dan $z$ bilangan genap.

## 2.2 PERSAMAAN KUADRAT

Persamaan kuadrat seringkali dijumpai dari permasalahan yang muncul dari suatu fenomena nyata. Sebagai ilustrasi: si Pegy mempunyai usaha penjualan paket kue. Dalam penjualan, Pegy mempunyai banyak pekerja keliling. Salah satu pekerjanya bernama si A. Dalam setiap harinya, si A diberikan honorarium sebesar Rp (10+2*x*), dengan *x* adalah banyaknya paket yang dijual oleh si A. Jika si A berhasil menjual *x* paket, maka si Pegy juga memperoleh pendapatan akibat dari penjualan oleh si A, dan besarnya adalah $0{,}1x(10+2x) = x + 0{,}2x^2$. Pegy menginginkan pendapatan setiap hari yang berasal dari si A adalah Rp 10. Berapa paket kue yang harus di jual si A agar target pendapatan si Pegy terpenuhi. Pada permasalahan ini, dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan kuadrat.

Bentuk umum persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2.2.1)$$

dengan $a \neq 0$, $b, c \in R$.

Untuk lebih jelasnya, kita lihat beberapa contoh persamaan kuadrat berikut ini.

CONTOH 2.2.1

1. $x^2 - 2x + 1 = 0$, persamaan kuadrat dengan $a$=1, $b$=-2, $c$=1.
2. $3y^2+4y+5=1$, persamaan kuadrat dengan $a$=3, $b$=4, $c$= 5–1= 4.
3. $2t^2 + 2t + 1 = 1$, persamaan kuadrat dengan $a$=2, $b$=2, $c$= 1-1 = 0.
4. $4n^2-16=0$, persamaan kuadrat dengan $a$=4, $b$=0, $c$= -16.
5. $u^2 + 2u^{1/2} - 5 = 0$ , bukan persamaan kuadrat karena terdapat pangkat ½ dari peubah u.

Bentuk persamaan kuadrat bergantung pada koefisian dari peubah $x$ yaitu $a$ , $b$ , $c$ sehingga terdapat beberapa bentuk persamaan kuadrat :

1. Jika nilai $a$, $b$, $c$ merupakan bilangan real maka persamaan kuadrat yang terbentuk disebut **Persamaan Kuadrat Real.**

2. Jika nilai $a$, $b$, $c$ merupakan bilangan rasional maka persamaan kuadrat yang terbentuk disebut **Persamaan Kuadrat Rasional.**

3. Jika $c = 0$ maka persamaan kuadrat yang terbentuk disebut **Persamaan Kuadrat Tak Lengkap.**

4. Jika $b = 0$ maka persamaan kuadrat yang terbentuk disebut **Persamaan Kuadrat Sejati.**

CONTOH 2.2.2

Nyatakan persamaan berikut menjadi bentuk umum.

a. $(x - 2)(x + 5) = 0$

b. $(2x - 4)^2 - 6 = 2x$.

c. $3x^2 - 6x + 3 = x(x + 3)$

d. $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3} = 7$

**Penyelesaian:**

Bentuk umum persamaan kuadrat yang diminta adalah

$ax^2 + bx + c = 0$.

a. $(x - 2)(x + 5) = 0$, dijabarkan menjadi $x^2 + 5x - 2x - 10 = 0$ atau

$x^2 + 3x - 10 = 0$.

b. $(2x - 4)^2 - 6 = 2x$, dijabarkan menjadi $(2x)^2 - 2(2x)(4) + (4)^2 - 6 = 2x$

$4x^2 - 16x + 16 - 6 = 2x$ atau $4x^2 - 16x - 2x + 10 = 0$ atau

$4x^2 - 18x + 10 = 0$.

c. $3x^2 - 6x + 3 = x(x + 3)$ , dijabarkan menjadi $3x^2 - 6x + 3 = x^2 + 3x$

$3x^2 - x^2 - 6x - 3x + 3 = 0$ atau

$2x^2 - 9x+3 = 0.$

d. $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3} = 7$ disamakan penyebutnya menjadi

$$\frac{3(x+3)+2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = 7$$

atau

$3(x+3)+2(x-2) = 7(x-2)(x+3)$, dijabarkan menjadi

$3x+9+2x -4 = 7(x^2 + 3x - 2x -6)$ atau

$7x^2 +2x - 47=0$

## 2.2.1 MENYELESAIKAN PERSAMAAN KUADRAT

Seperti halnya yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa persamaan kuadrat bergantung pada nilai-nilai *a, b, c*. Oleh karena itu penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut juga bergantung pada nilai *a, b, c* dan hasil penyelesaian tersebut berupa nilai peubah $x$ yang disebut sebagai akar-akar persamaan kuadrat.

Terdapat 3 cara untuk menyelesaikan persamaan kuadrat :

**1. Dengan cara memfaktorkan**

Cara ini dilakukan berdasarkan pada definisi yang berlaku pada bentuk kesamaan kuadrat bahwa $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

Perhatikan bentuk persamaan kuadrat :

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ dengan } a \neq 0$$

kedua ruas dibagi $a$ atau jadikan koefisien $x^2$ menjadi 1 seperti persamaan (2.2.2).

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (2.2.2)$$

Jika $p + q = \frac{b}{a}$ dan $p\,q = \frac{c}{a}$ maka persamaan (2.2.2) dapat difaktorkan menjadi $(x + p)(x + q) = 0$. Sehingga diperoleh:

$$x + p = 0 \text{ atau } x + q = 0.$$

Jadi akar–akar persamaan kuadrat tersebut adalah $x_1 = -p$ dan $x_2 = -q$. Himpunan penyelesaian persamaan tersebut adalah $\{-p, -q\}$.

Cara lain dalam memfaktorkan persamaan kuadrat untuk $a \neq 1$ dapat dilakukan sebagai berikut.

Perhatikan bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{1}{a}\{(ax)^2 + a(bx) + ac\} = 0$$

atau

$$(ax)^2 + a(bx) + ac = 0 \qquad (2.2.3)$$

Jika $p + q = b$ dan $pq = c$, maka persamaan (2.2.3) dapat difaktorkan menjadi $(ax + p)(ax + q) = 0$. Sehingga diperoleh

$$ax + p = 0 \text{ atau } ax + q = 0 .$$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah $x_1 = \frac{-p}{a}$ dan $x_2 = \frac{-q}{a}$.

## CONTOH 2.2.3

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan $2x^2 - 6x - 20 = 0$ ?.

Penyelesaian:

$2x^2 - 6x - 20 = 0$ , kedua ruas dibagi 2 diperoleh

$x^2 - 3x - 10 = 0$ dapat dirubah menjadi

$x^2 + (2 - 5)x + (-5)(2) = 0$ , terlihat bahwa p = 2 dan q = -5

maka persamaan kuadrat tersebut dapat ditulis

$(x + 2)(x - 5) = 0$

dengan $x + 2 = 0$ dan $x - 5 = 0$ diperoleh akar – akar $x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah : {-2, 5}.

## CONTOH 2.2.4

Selesaikan persamaan kuadrat berbentuk $3x^2 + 4x - 10 = 2x^2 + 3x + 2$

Penyelesaian:

$$3x^2 + 4x - 10 = 2x^2 + 3x + 2$$

Jadikan persamaan berbentuk umum dengan membuat ruas kanan sama dengan 0

$$3x^2 - 2x^2 + 4x - 3x - 10 - 2 = 0$$

diperoleh persamaan berbentuk $x^2 + x - 12 = 0$

atau dapat ditulis

$x^2 + (4 - 3)x + 4(-3) = 0$ dan terlihat bahwa p = 4 dan q = -3

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3) = 0$$

sehingga diperoleh $x + 4 = 0$ dan $x - 3 = 0$.

Akar-akar persamaan adalah $x_1 = 3$ dan $x_2 = -4$ sehingga himpunan penyelesaian adalah {-4,3}.

## CONTOH 2.2.5

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 2 = 0.$$

Penyelesaian:

Dari persamaan $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 2 = 0,$ koefisien dari $x^2$ dijadikan 1.

Untuk itu, kedua ruas dari persamaan dikalikan dengan 3. Didapat hasil

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

atau dapat ditulis $x^2 + (2 + 3)x + 2(3) = 0$

dan terlihat bahwa p = 2 dan q = 3

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3\ ) = 0.$$

Sehingga diperoleh $x+2= 0$ dan $x+ 3\ = 0$. Jadi akar-akar persamaannya adalah $x_1= -2$ dan $x_2= -3$.

Oleh karena itu, himpunan penyelesaiannya adalah : {-2,-3}

## CONTOH 2.2.6

Selesaikan persamaan berbentuk $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = 1$.

Penyelesaian:

Pada persamaan $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = 1$, ruas kiri penyebutnya disamakan.

Sehingga diperoleh:

$$\frac{2x - 2(x-1)}{x(x-1)} = 1$$

atau

$$\frac{2}{x(x-1)} = 1$$

Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan $x(x\text{-}1)$, didapat:

$2 = x(x - 1)$ atau $x^2 - x - 2 = 0$.

Lakukan pemfaktoran sehingga didapat hasil:

$x^2 + (1 - 2)x + (-2)(1) = 0$ atau $(x + 1)(x - 2) = 0$

Dari sini diperoleh $x + 1 = 0$ atau $x - 2 = 0$

Sehingga akar–akar persamaan tersebut adalah $x_1 = -1$ atau $x_2 = 2$.

Jadi himpunan penyelesaian adalah {-1, 2}.

**2. Dengan Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna**

Cara lain untuk menyelesaikan persamaan kuadrat adalah dengan melengkapkan kuadrat sempurna.

Perhatikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Jadikan koefisien $x^2$ menjadi 1 dengan membagi kedua ruas dengan $a$, diperoleh:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Atau

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad (2.2.4)$$

$$(x + p)^2 = q \qquad (2.2.5)$$

Persamaan (2.2.4) dan (2.2.5) merupakan **bentuk kuadrat sempurna**.

Jika pada persamaan (2.2.4) nilai $\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a}}$ , maka persamaan di atas menjadi

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Atau

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \qquad (2.2.6)$$

## CONTOH 2.2.7

Dapatkan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 4x + 4 = 0$ ?.

Penyelesaian:

$x^2 + 4x + 4 = 0$ dapat ditulis

$x^2 + 2(2)x + 2^2 = (x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = 0$.

Akar – akar persamaan tersebut adalah $x_1 = -2$ dan $x_2 = -2$.

Himpunan penyelesaiannya adalah : {-2}.

## CONTOH 2.2.8

Nyatakan persamaan kuadrat $3x^2 + 6x + 9 = 0$ dalam bentuk kuadrat sempurna ?.

Penyelesaian:

$3x^2 + 6x + 9 = 0$, kedua ruas dibagi 3 diperoleh

$x^2 + 2x + 3 = 0$, melengkapkan dalam bentuk kuadrat sempurna.

$x^2 + 2x + 1^2 + 2 = 0$ atau $x^2 + 2x + 1^2 = -2$ .

Jadi $3x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2x + 1^2 + 2 = 0$ .

$x^2 + 2x + 1^2 = -2$ atau $(x + 1)^2 = -2$.

Didapat akar $x_1 = x_2 = -2$.

CONTOH 2.2.9

Nyatakan persamaan kuadrat $4x^2 + 6x + 9 = 0$ dalam bentuk kuadrat sempurna ?.

Penyelesaian:

$4x^2 + 6x + 9 = 0$, kedua ruas dibagi 4 diperoleh

$x^2 + \frac{6}{4}x + \frac{9}{4} = 0$.

Melengkapkan dalam bentuk kuadrat sempurna dengan cara menyatakan persamaan kedalam bentuk $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Diperoleh hasil berikut ini.

$x^2 + 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4} = 0$, atau

$x^2 + 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16} = 0$, atau

$x^2 + 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{27}{16}$, atau

$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{27}{16}$

Ini merupakan bentuk kuadrat sempurna.

**3. Dengan Cara Menggunakan Rumus abc**

Akan ditunjukkan berikut ini bahwa persamaan kuadrat

$ax^2+bx+c=0$

dengan $a \neq 0$, mempunyai akar-akar

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dan

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Pada $ax^2+bx+c=0$, kedua ruas dibagi dengan $a$ diperoleh

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, lanjutkan dengan melengkapkan dalam bentuk persamaan kuadrat sempurna.

$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=0$, atau

$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$, atau

$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, atau

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ , dari persamaan ini diperoleh dua persamaan berikut ini.

- Pertama: $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

  Dari sini diperoleh $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Kedua: $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

  Dari sini diperoleh $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Kedua akar $x_1$ dan $x_2$ di atas, biasa dituliskan dalam bentuk:

$$x_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2.2.7)$$

Persamaan (2.2.7) dinamakan **rumus abc**.

## CONTOH 2.2.10

Dengan menggunakan rumus abc, dapatkan akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 2x + 6 = 0$ ?.

Penyelesaian:

Pada persamaan $2x^2 - 2x + 6 = 0$, mempunyai a = 2, b = - 2, dan c = 6.

Oleh karena itu, akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 48}}{4}$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{-44}}{4}$$

Oleh karena terdapat tanda negatif pada akar, persamaan kuadrat tersebut tidak mempunyai akar real.

## CONTOH 2.2.11

Selesaikan persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 4 = 0$ ?.

Penyelesaian:

$x^2 + 5x + 4 = 0$ yang mempunyai $a = 1$, $b = 5$ dan $c = 4$

Oleh karena itu, akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_{12} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Dari sini diperoleh akar-akar $x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$ dan $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$.

CONTOH 2.2.12

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan $-x + 4 = \frac{-4}{x} - 2x$ ?.

Penyelesaian:

$-x + 4 = \frac{-4}{x} - 2x$, kalikan kedua ruas dengan $x$ diperoleh

$-x^2 + 4x = -4 -2x^2$, ruas sebelah kanan dibuat sama dengan 0

$-x^2 + 2x^2 + 4x + 4 = 0$ atau dapat ditulis

$x^2 + 4x + 4 = 0$, merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = 4$ dan $c = 4$.

Dengan menggunakan rumus abc, diperoleh:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x_{12} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dari sini diperoleh akar-akar $x_1 = x_2 = -2$. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{ -2 \}$.

## CONTOH 2.2.13

Selesaikan persamaan berbentuk $x^2 + x = \frac{-x^2+3x+4}{x+2}$?.

Penyelesaian:

$x^2 + x = \frac{-x^2+3x+4}{x+2}$, kedua ruas dikalikan dengan *x* + 2, diperoleh:

$(x^2 + x)(x + 2) = -x^2 + 3x + 4$, atau

$-x(x+1)(x+2) = x^2 - 3x - 4$, ruas kanan difaktorkan, diperoleh:

$-x(x+1)(x+2) = (x-4)(x+1)$, kedua ruas dibagi $(x+1)$

$-x(x+2) = (x-4)$, atau

$-x^2 - 2x = x - 4$, atau

$x^2 + 3x - 4 = 0$

Ini merupakan persamaan kuadrat dengan *a* = 1, *b* = 3 dan *c* = -4.

Dengan menggunakan rumus abc, diperoleh:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

Dari sini diperoleh akar-akar $x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ dan $x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$.

## CONTOH 2.2.14

Selesaikan persamaan $(x^2 - x)(x + 2) = -4(x + 2) + (x^2 + 5x + 6)$ ?

Penyelesaian:

$$(x^2 - x)(x + 2) = -4(x + 2) + (x^2 + 5x + 6),$$

dengan memfaktorkan persamaan kuadrat pada ruas kanan, diperoleh

$(x^2 - x)(x + 2) = -4(x + 2) + (x^2 + (2+3)x + 2(3)$, diperoleh

$(x^2 - x)(x+2) = -4(x+2) + (x + 2)(x + 3)$ kedua ruas dengan $(x + 2)$ didapat $(x^2 - x) = -4 + (x + 3)$, kedua ruas ditambah 4, $-x$ dan -3 diperoleh

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Ini merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = -2$ dan $c = 1$.

Dengan menggunaakan rumus abc, diperoleh:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Dari sini diperoleh akar-akar $x_1 = x_2 = 1$.

Dari beberapa contoh penyelesaian persamaan kuadrat yang menggunakan rumus abc, terlihat bahwa nilai akar ada mempunyai dua akar real berbeda, ada yang dua akarnya kembar (sama nilainya), ada juga yang akarnya berupa bilangan imaginer. Ketiga kondisi ini tergantung dari nilai $b^2 - 4ac$. Nilai ini dinamakan **diskriminan** dan sering disimbulkan dengan $D = b^2 - 4ac$. Ada tiga nilai diskriminan yaitu:

- Jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai akar sama atau akar kembar $x_1 = x_2$.
- Jika $D > 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real berbeda, $x_1 \neq x_2$.
- Jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai akar imaginer.

## 2.2.2 MENCARI HUBUNGAN AKAR-AKAR PERSAMAAN KUADRAT

Pada subbab ini akan dibahas beberapa pernyataan yang berkaitan dengan akar-akar persamaan kuadrat $x_1$ dan $x_2$.

Akar dari persamaan kuadrat, menurut rumus abc dinyatakan sebagai:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Beberapa pernyataan yang berkaitan dengan akar-akar ini adalah:

1. Jika $x_1$ ditambahkan dengan $x_2$, maka dapat diperoleh:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad (2.2.8)$$

2. Jika $x_1$ dikalikan dengan $x_2$, maka dapat diperoleh:

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \qquad (2.2.9)$$

Dengan persamaan (2.2.8) dan (2.2.9), persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

atau

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \qquad (2.2.10)$$

## CONTOH 2.2.15

Carilah persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah $1 + \sqrt{2}$ dan $1 - \sqrt{2}$.

Penyelesaian:

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ dan $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

a. $x_1 + x_2 = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$

b. $x_1x_2 = (1 + \sqrt{2}) \times (1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$

Kita masukkan ke dalam persamaan (2.2.10), didapatkan persamaan kuadrat: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ atau $x^2 - 2x - 1 = 0$.

## CONTOH 2.2.16

Jika $x_1$ adalah salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 - 2px + p = 0$ dan akar lainnya adalah $\frac{1}{x_1}$ maka dapatkan nilai dari $p$ ?.

Penyelesaian:

$x_2 = \frac{1}{x_1}$ atau $x_1x_2 = 1$.

Salah satu bentuk persamaan kuadrat adalah

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Dari sini terlihat bahwa $p = x_1x_2 = 1$.

CONTOH 2.2.17

Perhatikan persamaan kuadrat $2px^2 - 4px + 8 = 0$. Jika salah satu akarnya merupakan 4 kali akar yang lain, maka dapatkan nilai *p* dan akar-akar tersebut ?

Penyelesaian:

Perhatikan kembali bentuk persamaan kuadrat:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Kalau kita padankan dengan persamaan kuadrat $2px^2 - 4px + 8 = 0$, didapat:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{4p}{2p} = 2$

Karena diketahui bahwa $x_1 = 4x_2$, maka:

- $4x_2 + x_2 = 2$ atau $x_2 = \frac{2}{5}$

Dari ini, nilai $x_1 = 4x_2 = 4\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

Jadi akar-akarnya adalah $\frac{2}{5}$ dan $\frac{8}{5}$.

Selanjutnya nilai *p* dicari dari $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{2p}$ atau

$\frac{2}{5}\frac{8}{5} = \frac{8}{2p}$ atau nilai $p = \frac{25}{4}$

CONTOH 2.2.18

Salah satu akar dari persamaan kuadrat $-4x^2 + px - 16 = 0$ adalah -2 kali terhadap akar yang lain, dapatkan nilai *p* dan bentuk persamaan kuadratnya.

Penyelesaian:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-p}{-4}$ dan $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-16}{-4}$,

diketahui $x_1 = -2x_2$ maka

$(-2x_2)x_2 = -4$

diperoleh $(x_2)^2 - 2 = 0$ atau $x_2 = \pm\sqrt{2}$ dan $x_1 = -2x_2 = \pm 2\sqrt{2}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-p}{-4} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

diperoleh $p_1 = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ dan $p_2 = -8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.

Untuk $p_1 = 4\sqrt{2}$, persamaan kuadratnya adalah

$$-4x^2 + 4\sqrt{2}x - 16 = 0$$

dengan akar-akar $x_1 = 2\sqrt{2}$ dan $x_2 = -\sqrt{2}$

Untuk $p_2 = -4\sqrt{2}$, persamaan kuadratnya adalah

$$-4x^2 - 4\sqrt{2}x - 16 = 0$$

dengan akar-akar $x_1 = -2\sqrt{2}$ dan $x_2 = \sqrt{2}$

CONTOH 2.2.19

Dapatkan akar-akar dan nilai p jika persamaan kuadrat berbentuk $x^2 - 2px + 12 = 0$ dan selisih dari akar-akarnya adalah 4.

Penyelesaian:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{p}{1} = p \text{ dan } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

diketahui bahwa $x_1 - x_2 = 4$ atau $x_1 = 4 + x_2$ maka $(4 + x_2)x_2 = 12$

atau $x^2 + 4x - 12 = 0$,

dengan cara faktorisasi dapat diperoleh

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

yang mempunyai akar-akar $x_2$ = -6 dan $x_2$ = 2.

Oleh karena $x_1 = 4 + x_2$ maka untuk $x_2$ = -6 diperoleh $x_1$ = -2 dan untuk $x_2$ = 2 diperoleh $x_1$ = 6.

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{p}{1} = p$ jika untuk nilai $x_2$ = -6 dan $x_1$ = -2

maka diperoleh p = -8 dan persamaan kuadrat yang terbentuk adalah

$x^2 + 16x + 12 = 0$ .

Jika untuk $x_2$ = 2, $x_1$ = 6 maka diperoleh p = 8 dan persamaan kuadrat yang terbentuk adalah $x^2 + 16x + 12 = 0$.

## CONTOH 2.2.20

Hasil kali akar-akar suatu persamaan kuadrat adalah $\frac{1}{2}$ dan salah satu akar $\frac{2}{3}$ dari akar yang lain, dapatkan persamaan kuadrat tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah $x_1$ dan $x_2$, telah diketahui bahwa $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ dan $x_1 = \frac{2}{3} x_2$ , diperoleh $\frac{2}{3} x_2\, x_2 = \frac{1}{2}$ atau dapat ditulis $x^2 - \frac{3}{4} = 0$ dengan akar-akar $x_{12} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Untuk akar $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

demikian pula untuk akar $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ diperoleh $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Jadi jumlah kedua akar-akarnya persamaan kuadrat mempunyai 2 kemungkinan yaitu $x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}$ atau

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Dengan demikian persamaan kuadratnya adalah

$$x^2 - \frac{5}{6}\sqrt{3}x + \frac{1}{2} = 0$$

atau

$$x^2 + \frac{1}{6}\sqrt{3}x + \frac{1}{2} = 0$$

## 2.2.3 HUBUNGAN ANTARA AKAR-AKAR PERSAMAAN KUADRAT LAINNYA

Misalkan persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ dengan akar $x_1$ dan $x_2$. Hubungan diantara akar-akar $x_1$ dan $x_2$ seperti $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ dapat dipakai untuk mempermudah pencarian bentuk-bentuk hubungan antar akar-akar yang lainnya seperti:

1. $(x_1 - x_2)^2$
2. $x_1^2 + x_2^2$

3. $x_1{}^2x_2 + x_2{}^2x_1 + x_1x_2$

4. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

## CONTOH 2.2.21

Jika akar-akar persamaan kuadrat $4x^2 + 2x - 1 = 0$ adalah $x_1$ dan $x_2$, maka dapatkan nilai – nilai dari hubungan akar-akar dibawah ini :

a. $x_1^2 + x_2^2$

b. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

c. $x_1^3 + x_2^3$

d. $(x_1 + x_2)^2$

e. $x_1^2 - x_2^2$

f. $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$

Penyelesaian:

Dari persamaan kuadrat dapat diperoleh hubungan akar-akar

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \text{ dan } x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

a. Bentuk $x_1^2 + x_2^2$ dinyatakan dalam bentuk penjumlahan dan perkalian dari akar-akar persamaan kuadrat, telah diketahui sebelumnya bahwa bentuk sempurna kesamaan kuadrat:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

dengan demikian:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\frac{-1}{2})^2 - 2\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

b. Seperti sebelumnya, dapat dicari $x_1^2\, x_2 + x_2^2\, x_1 = x_1\, x_2\, (x_1 + x_2)$

Sehingga diperoleh $x_1^2\, x_2 + x_2^2\, x_1 = \frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

c. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1\, x_2 + x_2^2)$

$= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1\, x_2),$

dari contoh diatas telah diperoleh $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{4}$

sehingga diperoleh $x_1^3 + x_2^3 = \frac{-1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$

d. $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

Telah dicari sebelumnya bahwa $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{4}$.

Dengan demikian $(x_1 - x_2)^2 = \frac{3}{4} - 2\frac{-1}{4} = \frac{5}{4}$

e. $x_1^2 - x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - (\frac{-1}{2})^2 + 2\frac{-1}{4} - \frac{-1}{4}$

f. $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{3x_2 + 3x_2}{x_1x_2} = \frac{3\,(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{3(-\frac{1}{2})}{-1/4} = 6$

### ■ Menyusun Persamaan Kuadrat Jika Akar-akarnya Mempunyai Hubungan Dengan Akar-akar Persamaan Kuadrat Lainnya.

Untuk menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya mempunyai hubungan dengan akar-akar persamaan kuadrat yang diketahui mempunyai 2 cara yaitu:

1. Dengan menggunakan rumus penjumlahan dan perkalian akar-akar.
2. Dengan menggunakan penggantian.

- **Menggunakan Rumus Penjumlahan dan Perkalian Akar-akar**

Jika diketahui persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, maka didapat penjumlahan akar $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan perkalian akar $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Untuk menentukan persamaan kuadrat baru perlu untuk dicari akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut dan hubungannya dengan akar – akar persamaan kuadrat yang diketahui.

CONTOH 2.2.22

Dapatkan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah $x_1 + 3$ dan $x_2 + 3$ dimana $x_1$ dan $x_2$ akar-akar persamaan $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Penyelesaian:

Persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 4 = 0$ mempunyai jumlahan akar-akar $x_1 + x_2 = -4$ dan perkalian akar-akar $x_1x_2 = 4$ .

Jika dimisalkan persamaan kuadrat baru berbentuk $au^2 + bu + c = 0$ dengan akar-akar $u_1 = x_1 + 2$ atau $u_1 - 3 = x_1$ dan $u_2 - 3 = x_2$ maka dapat dicari akar-akar tersebut dari:

- $x_1 + x_2 = -4$ atau $u_1 - 2 + u_2 - 3 = -4$

  sehingga $u_1 - 3 + u_2 - 3 = -4$ atau $u_1 + u_2 = 2$

- $x_1x_2 = 4$ atau

  $(u_1 - 3)(u_2 - 3) = 4$ atau diperoleh persamaan $u_1u_2 - 3(u_1 + u_2) = -5$

  atau $u_1u_2 = -5 + 3(2) = 1$.

Dengan demikian persamaan kuadrat yang baru adalah

$$u^2 - (u_1 + u_2)u + u_1u_2 = 0 \text{ atau } u^2 - 2u + 1 = 0$$

## CONTOH 2.2.23

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{3}{x_1}$ dan $\frac{3}{x_2}$ jika $x_1$ dan $x_2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x + 1 = 0$ ?

Penyelesaian:

Penjumlahan akar-akar $x_1 + x_2 = -2$ dan

Perkalian akar-akar $x_1\,x_2 = 1$.

Misalkan persamaan kuadrat baru berbentuk $a\,y^2 + b\,y + c = 0$ dengan

akar-akar $y_1 = \frac{3}{x_1}$ atau $x_1 = \frac{3}{y_1}$ dan $x_2 = \frac{3}{y_2}$, dapat dicari:

- $x_1 + x_2 = -2$ atau $\frac{3}{y_1} + \frac{3}{y_2} = -2$ atau

$\frac{3(y_1+y_2)}{y_1 y_2} = -2$ atau $3(y_1 + y_2) = -2y_1y_2$.

- $x_1\ x_2 = 1$ atau $\frac{3}{y_1}\ \frac{3}{y_2} = 1$ atau $y_1\ y_2 = 9$ sehingga dapat diperoleh

 $3(y_1 + y_2) = -2\ y_1\ y_2$

 atau $y_1 + y_2 = -6$ .

Dengan demikian persamaan kuadrat yang baru adalah

$y^2 - (y_1 + y_2)\ y + y_1\ y_2 = 0$ atau $y^2 + 6y + 9 = 0$

- **Menggunakan penggantian**

Untuk mendapatkan persamaan kuadrat yang baru dengan cara penggantian dapat dilakukan jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru simetri dengan akar-akar persamaan kuadrat yang diketahui.

CONTOH 2.2.24

Jika $x_1$ dan $x_2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat dari $x^2 - 4x + 4 = 0$ maka dapatkan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah :

a. $\frac{1}{d\ x_1}$ dan $\frac{1}{d\ x_2}$ dengan $d$ adalah konstanta yang tidak nol.

b. $x_1^2 + x_2^2$ dan $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$

Penyelesaian:

Dari persamaan yang diketahui $x^2 - 4x + 4 = 0$ dapat diperoleh

$x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1\ x_2 = 4$

a. Misalkan akar-akar persamaan baru adalah $y_1 = \frac{1}{dx_1}$ dan $y_2 = \frac{1}{dx_2}$ dimana penjumlahan dan perkalian dari akar-akar tersebut berbentuk simetri walaupun nilai dari $x_1$ dan $x_2$ dirubah. Oleh karena itu, dapat dilakukan penggantian dari akar-akar tersebut yaitu $y = \frac{1}{dx}$ atau $x = \frac{1}{dy}$ pada persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 4 = 0$ yaitu

$\left(\frac{1}{dy}\right)^2 - 4\frac{1}{dy} + 4 = 0$ atau $\frac{1}{(dy)^2} - 4\frac{1}{dy} + 4 = 0$, kedua ruas

dikalikan $d^2y^2$ diperoleh $1 - dy + 4d^2y^2 = 0$ atau $4d^2y^2 - dy + 1 = 0$

b. Misalkan akar-akar persamaan baru adalah $y_1 = x_1^2 + x_2^2$ atau $y_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 32 = -16$ dan $y_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$ atau $y_2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 16$.

Dengan demikian persamaan kuadrat yang baru adalah

$y^2 - (y_1 + y_2) + y_1 y_2 = 0$ atau $y^2 - 256 = 0$

## CONTOH 2.2.25

Dapatkan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\frac{1}{x_1x_2}$ dan $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ dimana $x_1$ dan $x_2$ merupakan akar persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Penyelesaian:

Dari persamaan kuadrat yang diketahui diperoleh $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -6$ dan $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 9$.

Misalkan akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah $v_1 = \frac{1}{x_1 x_2} = 9$ dan $v_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$ , diperoleh persamaan kuadrat yang baru adalah $v^2 - (v_1 + v_2) + v_1 v_2 = 0$ atau $v^2 - \frac{25}{3} v - 6 = 0$.

## 2.2.4 MENERAPKAN PERSAMAAN KUADRAT

Sebelum ini, kita telah belajar banyak tentang persamaan kuadrat dan berbagai cara menyelesaikan persamaan kuadrat. Banyak permasalahan yang berhubungan dengan persamaan kuadrat. Pada subbab ini, kita akan menggunakan persamaan kuadrat untuk menyelesaikan beberapa permasalahan.

### CONTOH 2.2.26

Sekelompok orang melakukan usaha bersama membentuk suatu badan usaha. Pada tahun pertama usaha tersebut mendapatkan keuntungan sebesar Rp 10.000.000. Keuntungan tersebut dibagai rata pada setiap anggotanya. Jika ada 2 orang anggota tidak mau menerima keuntungan usaha tahun pertama, maka setiap anggota kelompok akan menerima Rp 250.000 lebih banyak dari penerimaan yang dibagai pada semua anggotanya. Tentukan banyaknya anggota kelompok tersebut.

Penyelesaian:

Misal *x* merupakan banyaknya anggota kelompok.

- Jika keuntungan dibagi pada semua anggota kelompok, maka setiap anggotanya menerima *A* rupiah. Besarnya nilai A adalah

$$A = \frac{10.000.000}{x}$$

- Jika keuntungan tersebut dibagi (*x*-2) orang, maka setiap anggotanya menerima *B* rupiah. Besarnya nilai *B* adalah

$$B = \frac{10.000.000}{x-2}$$

- Jika ada 2 orang tidak mau menerima keuntungan, maka selisih yang diterima setiap anggota adalah Rp 250.000. Dari sini diperoleh

$$A + 250.000 = B$$

$$\Rightarrow \frac{10.000.000}{x} + 250.000 = \frac{10.000.000}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{10.000.000 + 250.000\,x}{x} = \frac{10.000.000}{x-2}$$

$$\Rightarrow (10.000.000 + 250.000x)(x-2) = 10.000.000x$$

$$\Rightarrow 250.000x^2 + 9.500.000x - 20.000.000 = 10.000.000x$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 950x - 2.000 = 1.000x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x + 8) = 0$$

Dari persamaan ini, diperoleh $x = 10$ dan $x = -8$. Akan tetapi, nilai $x$ harus lebih besar nol. Karena itu, diperoleh hasil banyaknya anggota ada sebanyak 10 orang.

## CONTOH 2.2.27

Panitia wisata menyewa sebuah bus seharga Rp 2.000.000. Biaya sewa bus ditanggung secara merata oleh peserta wisata. Jika pada saat mau berangkat ada 8 orang yang mengundurkan diri, maka setiap peserta

harus menambah biaya sebesar Rp 12.500. Tentukan banyaknya peserta wisata tersebut.

**Penyelesaian:**

Misal $x$ merupakan banyaknya peserta wisata.

- Jika biaya sewa bus dibagi pada semua peserta, maka setiap peserta membayar $A$ rupiah. Besarnya nilai A adalah

$$A = \frac{2.000.000}{x}$$

- Jika biaya sewa tersebut dibagi ($x$-8) orang, maka setiap peserta membayar $B$ rupiah. Besarnya nilai $B$ adalah

$$B = \frac{2.000.000}{x - 8}$$

- Jika ada 8 peserta mengundurkan diri, maka setiap peserta menambah Rp 12.500. Dari sini diperoleh

$$A + 12.500 = B$$

$$\Rightarrow \frac{2.000.000}{x} + 12.500 = \frac{2.000.000}{x-8}$$

$$\Rightarrow \frac{2.000.000 + 12.500\,x}{x} = \frac{2.000.000}{x-8}$$

$$\Rightarrow (2.000.000 + 12.500x)(x-8) = 2.000.000x$$

$$\Rightarrow 12.500x^2 + 1.900.000x - 16.000.000 = 2.000.000x$$

$$\Rightarrow 125x^2 - 1.000x - 160.000 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 1\,280 = 0$$

$$\Rightarrow (x-40)(x+8) = 0$$

Dari persamaan ini, diperoleh $x = 10$ dan $x = -8$. Akan tetapi, nilai $x$ harus lebih besar nol. Karena itu, diperoleh hasil banyaknya anggota ada sebanyak 10 orang.

CONTOH 2.2.28

Si Pegy mempunyai usaha penjualan paket kue. Dalam penjualan, Pegy mempunyai banyak pekerja keliling. Salah satu pekerjanya bernama si A. Dalam setiap harinya, si A diberikan honorarium sebesar Rp (10+2*x*), dengan *x* adalah banyaknya paket yang dijual oleh si A. Jika si A berhasil menjual *x* paket, maka si Pegy juga memperoleh pendapatan akibat dari penjualan oleh si A, dan besarnya adalah $0{,}1x(10+2x)=x+0{,}2x^2$. Pegy menginginkan pendapatan setiap hari yang berasal dari si A adalah Rp 10. Berapa paket kue yang harus di jual si A agar target pendapatan si Pegy terpenuhi.

**Penyelesaian:**

Pada permasalahan ini, dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan kuadrat $x+0{,}2x^2=10$, atau

$$0{,}2x^2+x-10=0$$

$$\Rightarrow x^2+5x-50=0$$

$$\Rightarrow (x+10)(x-5)=0$$

Diperoleh *x*=-10 dan *x*=5. Karena *x* adalah banyaknya paket barang yang dijual, *x* tidak boleh negatif.

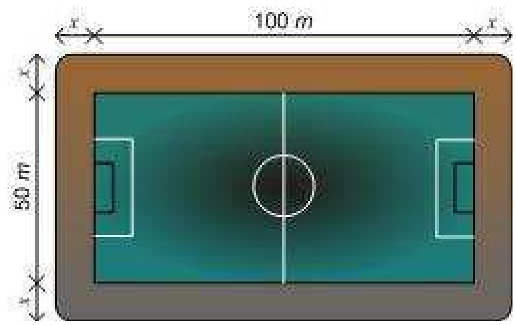
Jadi diperoleh hasil *x*=5, si A harus menjual sebanyak 5 paket agar si Pegy memperoleh pendapatan Rp 10 dari penjualan si A.

CONTOH 2.2.29

Pada luar lapangan sepak bola yang berukuran 100 *m* × 50 *m,* akan dibuat jalur lari dengan lebar jalur tetap. Jalur tersebut mengelilingi lapangan sepak bola. Jika luas jalur tersebut adalah 2.500 $m^2$, maka tentukan lebar jalur tersebut.

**Penyelesaian:**

Misalkan lebar jalur yang harus dibuat adalah *x m*, lihat Gambar 2.2.1.




Gambar 2.2.1 Jalur lari dengan lebar tetap.

Luas jalur dalam $m^2$ adalah

$$L = 2(100x) + 2(50x) + 4x^2$$

Karena luas jalur adalah 2.500 $m^2$, maka :

$$2.500 = 4x^2 + 300x$$

$$x^2 + 75x - 2.500 = 0$$

$$(x+100)\ (x-25)=0$$

Karena nilai $x > 0$, maka diperoleh $x = 25$ *m.*

Jadi lebar jalur di sisi lapangan sepak bola tersebut adalah 25 *m.*

## • RANGKUMAN

- Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, $b$, $c \in R$.
    - Jika dapat difaktorkan ke bentuk $(x+p)(x+q) = 0$, maka penyelesaiannya adalah $x_1 = -p$ dan $x_1 = -q$.
    - Mempunyai bentuk kuadrat sempurna $(x+p)^2 = q$
    - Mempunyai akar-akar $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Jika $x_1$ dan $x_2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka
    - $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
    - $x_1 \, x_2 = \frac{c}{a}$

## SOAL LATIHAN 2-2

1. Dapatkan akar persamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan.

    a. $x^2 + x - 12 = 0$ b. $x^2 - 2x - 8 = 0$.

    c. $x^2 - 4x - 5 = 0$ d. $x^2 + 5x = -6$

    e. $x^2 + 2x = 3$ f. $x^2 - 14x - 32 = 0$

2. Carilah akar persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan bentuk sempurna.

a. $(x-1)^2 = 100$ b. $x^2 - 12x - 45 = 0$

c. $(y-2)(y-2) = 9$ d. $3t^2 + t - 2 = 0$

e. $(2x+3)^2 = 25$ f. $u^2 + 8u - 9 = 0$.

3. Carilah akar persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus abc.

   a. $2x^2 - 4x - 2 = 0$ b. $x^2 - 5x + 3 = 0$

   c. $6x^2 - 7x + 2 = 0$. d. $2x^2 - 6x + 11 = 0$.

   e. $3x^2 - 6x = 9$ f. $x^2 + 4x - 8 = 0$

4. Setiap sabtu, Amir pelari peserta PON berlatih lari 18 km, tujuannya adalah mengurangi waktu tempuh sebesar setengah jam, dengan bantuan murid SMU kelas 1 dianjurkan agar ia berlari 1,2 km perjam lebih cepat. Tentukan kecepatan ia berlari ?

5. Peluru ditembakkan vertikal ke udara dengan kecepatan awal $v_0$ dan pada saat

   tertentu akan mencapai ketinggian sebesar $v_0t - 10t^2$ . jika ketinggian maksimum 30 maka tentukan waktu sampai peluru mencapai tanah ?

6. Suatu kotak berbentuk balok yang mempunyai volume = luas alas × tinggi, jika alas dan tutup kotak berbentuk bujur sangkar , sisi balok berbentu empat persegi panjang maka dapatkan luas sisi balok untuk volume = 100 , alas dan tutup diabaikan, tinggi =2?

7. Jumlah pangkat dua dari tiga bilangan ganjil yang berurutan adalah 515 . tentukan bilangan –bilangan tersebut ?

8. Suatu tangga dengan panjang 10 bersandar pada tembok , jarak ujung tangga dengan lantai adalah 6, tentukan jarak geseran kaki tangga agar ujung atas tangga bergeser sama panjang dengan geseran bawah ?

9. Dapatkan persamaan kuadrat yang akar-akarnya.

   a. 4 dan -4 b. $u$ dan $2 - u$

   c. 2 dan 7 d. $1/t$ dan $t$

10. Jika a dan b akar-akar persamaan kuadrat maka bentuk faktor dari persamaan kuadrat dapat ditulis $(x + a)(x + b) = 0$ , dapatkan persamaan kuadrat tersebut jika:

   a. $a = -3$ dan $b = 4$.
   b. $a = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$
   c. $a = (\sqrt{3} - \sqrt{5})$ dan $b = (\sqrt{3} + \sqrt{5})$
   d. $a = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$ , $b = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

11. Susunlah suatu persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$.

    Dapatkan persamaan kuadrat yang hubungan diantara akar-akarnya adalah

   a. jumlah akar-akarnya = 3 , hasil kali akar-akarnya = 4.

   b. jumlah akar-akarnya = -4 , hasil kali akar-akarnya = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

   c. jumlah akar-akarnya = 2 , hasil kali akar-akarnya = 2

   d. jumlah akar-akarnya = 1 , hasil kali akar-akarnya = -1.

12. Diketahui salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 - 2qx + 4q = 0$ tiga kali akar yang lain , dapatkan nilai p dan akar-akarnya

13. Akar-akar persamaan $(2p - 1)x^2 - 15/2x - 3 = 0$ saling berkebalikan , dapatkan nilai p dan akar-akarnya.

14. Persamaan kuadrat berbentuk $2x^2 + (p + 3)\ x - 4p = 0$ yang selisih akar-akarnya sama dengan 7 , dapatkan nilai p dan akar-akarnya

15. Salah satu akar persamaan $-2x^2 + px - p + 2 = 0$ sama dengan 0, dapatkan nilai p.

16. Salah satu akar persamaan kuadrat $3x^2 - (p - 3)x + p + 2 = 0$ berlawanan 2 kali, dapatkan nilai p ?

17. $x_1$ dan $x_2$ adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x = \frac{p}{2}$, dapatkan p dan akar- akarnya jika $2x_1 + x_2 = 2$ ?

18. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 4 = 0$ adalah $x_1$ dan $x_2$ , dapatkan bentuk simetri dengan tanpa mencari akar persamaannya .

    a. $x_1^2 + x_2^2$      b. $x_1^3 + x_2^3$

    c. $x_1^2 + x_1^2 x_2 \ + x_1 \ x_2^2 + x_2^2$      d. $\frac{1}{x_{1-3}} + \frac{1}{x_{2-3}}$

19. Akar persamaan kuadrat $x^2 - (p + 1)x - 2p+4 = 0$, hitunglah bentuk berikut yang merupakan bentuk simetri dari $x_1$ dan $x_2$

    a. $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$      b. $x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4}$

    c. $x_1^{\ 3} + x_1^{\ 2}\ x_2 + x_1\ x_2^{\ 2} + x_2^{\ 3}$      d. $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

20. Akar-akar persamaan $9x^2 - 15x + p = 0$ adalah $x_1$ dan $x_2$, hitunglah p jika

    a. $x_1^{\ 2} + x_1^{\ 2}\ x_2 + x_1\ x_2^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 2$      b . $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = x_1 + x_2$

21. Hitunglah $p$ jika $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 10$ untuk persamaan kuadrat berbentuk $x^2 - px - 4 = 0$ ?

22. Bilangan $x_1$ dan $x_2$ adalah akar persamaan $x^2 - 2bx + b^2 = 0$, dapatkan $b$ jika $x_1^2 + x_2^2 = 2$ ?

23. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya 2 kali lebih kecil dari akar persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 9 = 0$ ?

24. Akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x + a - 1 = 0$ adalah $x_1$ dan $x_2$, tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya

a. $\frac{x_1}{x_2}$ dan $\frac{x_2}{x_1}$ b. $x_1^2$ dan $x_2^2$

c. $\frac{1}{x_1-2}$ dan $\frac{1}{x_2-2}$ d. $\frac{1}{x_1^2}$ dan $\frac{1}{x_2^2}$

25. Susunlah suatu persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya kebalikan dari akar-akar persamaan $x^2 - 6ax - 6a = 0$ ?

26. Persamaan yang akar-akarnya 2 lebih kecil dari persamaan kuadrat $x^2 - 6ax - 6a = 0$ adalah $2x^2 - 6x + 6 = 0$, tentukan a dan akar-akarnya ?

27. Persamaan kuadrat $6x^2 - x - 12 = 0$ mempunyai akar-akar $x_1$ dan $x_2$, tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $x_1^2 + x_2^2$ dan $x_1^2 - x_2^2$.

28. Sekelompok orang menerima borongan pekerjaan penggalian selokan dengan imbalan sebesar Rp 2 juta yang dibagi rata pada setiap anggotanya. Jika 2 orang onggotanya mengundurkan diri, maka setiap anggota kelompok akan menerima Rp 50.000 lebih banyak dari penerimaan semula, sebelum ada yang mengundurkan diri. Tentukan banyaknya anggota kelompok tersebut.

29. Seseorang berjalan menyusuri sepetak pekarangan berbentuk persegi panjang yang luasnya 216 $m^2$ tanpa berhenti. Andaikan langkah orang tersebut selalu tetap sebesar 60 *cm*, maka tentukan ukuran pekarangan tersebut jika orang tersebut selesai mengelilingi pekarangannya dalam 100 langkah.

30. Jika jumlah dari kebalikan dua bilangan genap yang berurutan adalah $\frac{9}{40}$, maka tentukan jumlah dari dua bilangan genap tersebut.

## 2.3 SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Sistem persamaan linear atau juga disebut sebagai sistem persamaan linear serentak merupakan kumpulan atau himpunan dari persamaan linear. Dalam buku ini dibahas system persamaan linear:

1. Sistem persamaan linear 2 peubah dengan 2 persamaan.
2. Sistem persamaan linear 3 peubah dengan 2 persamaan.
3. Sistem persamaan linear 3 peubah dengan 3 persamaan.

Sistem persamaan linear banyak sekali dijumpai dalam banyak aplikasi misalnya:

- Seorang pengusaha busana seragam untuk pria dan wanita dengan bentuk yang berbeda dan terbagi dalam 2 ukuran sedang dan besar. Ukuran sedang memerlukan 1,2 meter untuk seragam pria dan 2 meter untuk seragam wanita. Ukuran besar memerlukan 1,5 meter per seragam pria dan 2,5 meter perseragam wanita. Jika bahan yang tersedia untuk pria sebanyak 100 meter dan wanita 200 meter, maka banyaknya seragam yang dapat dibuat untuk ukuran sedang dan besar adalah.

Misalkan peubah $x$ menyatakan seragam dengan ukuran sedang. Peubah $y$ menyatakan seragam dengan ukuran besar. Banyaknya seragam pria yang dapat dibuat adalah $1{,}2\,x + 1{,}5y = 100$, dan banyaknya seragam wanita yang dapat dibuat adalah $2x + 2{,}5y = 200$. Dan ini membentuk dua persamaan linear berikut ini.

$$1{,}2x + 1{,}5y = 100 \quad \text{dan} \quad 2x + 2{,}5y = 200$$

- Suatu obyek wisata yang mempunyai 3 lokasi dengan bentuk yang berbeda pada suatu tempat yang sama, setiap lokasi pendapatan yang diperoleh rata-rata adalah
  1. Lokasi A sebesar Rp 10.000.000,- dengan harga karcis Rp 2.500,- per dewasa, Rp 1.500,- peranak dan Rp 1000,- permobil.
  2. Lokasi B sebesar Rp 12.000.000,- dengan harga karcis Rp3.500,- per dewasa, Rp 2.500,- peranak dan Rp 1.000,- permobil.
  3. Lokasi C sebesar Rp 14.000.000,- dengan harga karcis Rp 3.000,- perdewasa, Rp 2.000,- peranak dan Rp 1000,- permobil.

  Banyaknya pengunjung dari ketiga lokasi wisata tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut.
  Misal $x$ menyatakan banyaknya pengunjung dewasa, $y$ menyatakan banyaknya pengunjung anak-anak dan $z$ menyatakan banyaknya pengunjung mobil. Permasalahan ini membentuk suatu sistem persamaan linear:

$$2500\,x + 1500\,y + 1000\,z = 10.000.000$$

$$3500\,x + 2500\,y + 1000\,z = 12.000.000$$

$$3000\,x + 2000\,y + 1000\,z = 14.000.000$$

- Pada ilustrasi nomor 2, jika hanya terdapat 2 lokasi pada obyek wisata tersebut, maka banyaknya pengunjung kedua lokasi wisata tersebut adalah :

$$2500x + 1500\,y + 1000\,z = 10.000.000$$
$$3000\,x + 2500\,y + 1000\,z = 12.000.000$$

## 2.3.1 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

Sistem persamaan linear dua peubah secara umum dapat ditulis :

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ dengan } a_1 , b_1 , c_1 \in R$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \text{ dengan } a_2 , b_2 , c_2 \in R$$

$a_1$ , $b_1$ , $a_2$ , $b_2$ tidak boleh bersama – sama bernilai nol.

Mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear merupakan pasangan (*x, y*) yang memenuhi kedua persamaan linear tersebut sehingga memberikan pernyataan yang benar.

Ada beberapa cara dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear yaitu :

1 . Metode Grafik.
2. Metode Eliminasi
3. Metode Substitusi.
4. Metode gabungan eliminasi dan substitusi.
5. Metode Matriks, dibahas pada Bab 3.

### i. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dengan Metode Grafik.

Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode grafik maka persamaan $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$ dapat dipandang sebagai garis lurus maka perpotongan dari kedua garis tersebut merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear .

Misalkan garis $u_1$ : $a_1x + b_1y = c_1$ dan garis $u_2$ : $a_2x + b_2y = c_2$ maka akan terdapat beberapa kemungkinan diantara kedua garis tersebut yaitu:

1. Terdapat satu titik potong jika $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Pada kondosi ini, sistem persamaan linear mempunyai satu penyelesaian/ jawab.
2. Garis $u_1$ berimpit dengan garis $u_2$ jika $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Pada kondisi ini, terdapat banyak titik yang memberikan jawaban yang benar dan dikatakan bahwa sistem persamaan linear mempunyai banyak penyelesaian.
3. Garis $u_1$ sejajar dengan $u_2$ namun tidak berhimpit, jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Pada kondisi ini, tidak terdapat perpotongan atau singgunggan antara kedua garis tersebut, sehingga sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.

CONTOH 2.3.1

Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berbentuk

$x + 2y = 3$ dan $2x + y = 3$.

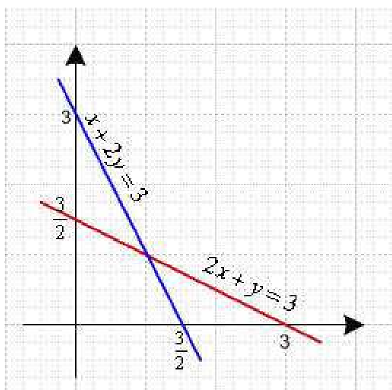
Penyelesaian:

Dari persamaan $x + 2y = 3$, didapat:

untuk $x = 0$ , $y = \frac{3}{2}$ dan

untuk $y = 0$ , $x = 3$

Jadi grafik melalui titik $(0, \frac{3}{2})$ dan (3, 0).




Dari persamaan $2x + y = 3$, didapat:

untuk $x=0$, $y = 3$ dan

untuk $y=0$, $x = \frac{3}{2}$

Jadi grafik melalui titik (0,3) dan $(\frac{3}{2}, 0)$.

Dari grafik terlihat bahwa perpotongan garis terjadi disekitar (1, 1). Sehingga penyelesaian dari sistem persamaan linear ini adalah $x=1$, dan $y=1$.

## ii. Menyelesaikan Dengan Metode Substitusi.

Misalkan sistem persamaan linear berbentuk $a_1x + b_1y = c_1$ , $a_2x + b_2y = c_2$. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan substitusi dimaksud adalah melakukan substitusi terhadap salah satu peubah $x$ atau $y$ dari 1 persamaan ke persamaan yang lain.

$a_1x + b_1y = c_1$, $b_1y = c_1 - a_1x$ atau $y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x$ disubstitusi pada

persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ diperoleh $a_2x + b_2(\frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x) = c_2$ atau

$$\left(a_2 - \frac{b_2 a_1}{b_1 b_2}\right)x = c_2 - \frac{b_2 c_1}{b_1}$$

Jadi

$$x = \frac{c_2 - \frac{b_2 c_1}{b_1}}{a_2 - \frac{b_2 c_1}{b_1}}$$

**CONTOH 2.3.2**

Dapatkan penyelesaian dari sistem persamaan linear

$3x - 2y = 5$

$2x + 4y = -2$

Penyelesaian:

Ambil salah satu persamaan $3x - 2y = 5$ atau $x = \frac{5+2y}{3}$, disubstitusikan ke persamaan lainnya $2x + 4y = -2$ atau $2\left(\frac{5+2y}{3}\right) + 4y = -2$, kedua ruas dikalikan 3 didapat

$$10 + 4y + 12y = -6 \text{ atau } y = \frac{-16}{16} = -1.$$

Nilai $y$=-1 dimasukkan ke persamaan $3x - 2y = 5$, didapat:

$3x - 2(-1) = 5$ atau $x = 1$

Sehingga penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah $x$=1, dan $y$=-1.

CONTOH 2.3.3

Selesaikan sistem persamaan linear berbentuk

$2x = 6y + 4$

$3x + 4y = 3$

Penyelesaian:

Ambil persamaan $2x = 6y + 4$ atau $x = 3y + 2$ disubstitusikan pada persamaan $3x + 4y = 3$, didapat

$3(3y + 2) + 4y = 3$ atau $13y = -3$

Diperoleh $y = \frac{-3}{13}$ dan nilai $y$ ini dimasukkan ke salah satu persamaan, didapat $x = 3\frac{-3}{13} + 2 = \frac{17}{13}$.

Jadi penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah $x = \frac{17}{13}$ dan $y = \frac{-3}{13}$.

**iii. Menyelesaikan Dengan Metode Eliminasi.**

Misalkan sistem persamaan linear berbentuk

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan eliminasi dimaksudkan adalah menghilangkan salah satu peubah dari sistem persamaan dengan menyamakan koefisien dari peubah tersebut.

$a_1x + b_1y = c_1 \;|\; \text{x } a_2 \rightarrow$ diperoleh $a_2a_1x + a_2b_1y = c_1a_2$

$a_2x + b_2y = c_2 \quad | \times a_1 \rightarrow$ diperoleh $\underline{a_2a_1x + a_1b_2y = c_2\, a_1}$

$(a_2b_1 - a_1b_2)y = c_1a_2 - c_2a_1$

Jadi

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

dan

$$x = \frac{c_1 - \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2}b_1}{a_1}$$

## CONTOH 2.3.4

Selesaikan sistem persamaan linear dengan eliminasi berbentuk

$2u + 8v = -2$

$-u + 3v = 4$

Penyelesaian:

$2u + 8v = -2$ dikalikan 1 diperoleh $\quad 2u + 8v = -2$

$-u + 3v = 4$ dikalikan 2 diperoleh $\quad \underline{-2u + 6v = 8}$

$14v = 6$

atau $v = 3/7$

$2u + 8v = -2$ dikalikan 3 diperoleh $\quad 6u + 24v = -6$

$-u + 3v = 4$ dikalikan 8 diperoleh $\quad \underline{-8u + 24v = 32 \ -}$

$14u = -38$

atau u = $\frac{-38}{14}$.

CONTOH 2.3.5

Dapatkan himpunan penyelesaian dengan eliminasi jika terdapat persamaan berbentuk $3s - 4t = 6$ dan $2s + 5t = -3$.

Penyelesaian:

$$\begin{array}{llr} 3s - 4t = 6 & \text{dikalikan } 2 \text{ diperoleh} & 6s - 8t = 12 \\ 2s + 5t = -3 & \text{dikalikan } 3 \text{ diperoleh} & 6s + 15t = -9 \;\; - \\ \hline & & -23t = 21 \end{array}$$

atau t = $\frac{-21}{23}$.

$$\begin{array}{llr} 3s - 4t = 6 & \text{dikalikan } 5 \text{ diperoleh} & 15s - 20t = 30 \\ 2s + 5t = -3 & \text{dikalikan } 4 \text{ diperoleh} & 8s + 20t = -12 \;\; + \\ \hline & & 23s = 18 \end{array}$$

atau s = $\frac{18}{23}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{18}{23}, \frac{-21}{23}\}$.

**iv. Menyelesaikan Dengan Metode Gabungan Eliminasi dan Substitusi.**

Misalkan sistem persamaan linear berbentuk

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Penyelesaikan sistem persamaan linear dengan gabungan eliminasi dan subtitusi dimaksudkan adalah melakukan eliminasi terhadap salah satu peubah yang kemudian melakukan subtitusi pada salah satu persamaan atau sebaliknya.

### CONTOH 2.3.6

Selesaikan sistem persamaan linear berbentuk

$3x - 4y = 5$ dan $-2x + 2y = 4$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{lrl} 3x - 4y = 5 \text{ dikalikan 2 diperoleh} & 6x - 8y = & 10 \\ -2x + 2y = 4 \text{ dikalikan 3 diperoleh} & -6x + 6y = & 12 \quad + \\ \hline & -2y = & 22 \end{array}$$

atau $y = -11$ , dilakukan subtitusi pada persamaan $-2x + 2y = 4$ maka didapat

$-2x + 2(-11) = 4$ atau $x = -13$.

Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah {-13, -11}.

### CONTOH 2.3.7

Dapatkan himpunan penyelesaian dari persamaan $4u - 8v = 7$ dan $3u + 2v = 2$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{lrl} 4u - 8v = 7 \text{ dikalikan 3 diperoleh} & 12u - 24v = & 21 \\ 3u + 2v = 2 \text{ dikalikan 4 diperoleh} & 12u + 8v = & 8 \quad - \\ \hline & -32v = & 13 \end{array}$$

atau $v = \frac{-13}{32}$, dilakukan subtitusi pada persamaan $3u + 2v = 2$ maka :

$3u + 2(\frac{-13}{32}) = 2$ atau $u = \frac{15}{16}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{15}{16}, \frac{-13}{32}\}$.

## 2.3.2 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA PEUBAH

Sistem persamaan linear tiga peubah dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

dengan $a_1$, $b_1$ ,$c_1$ , $d_1$ , $a_2$, $b_2$ , $c_2$ , $d_2$ , $a_3$ , $b_3$ , $c_3$, $d_3$ merupakan bilangan real.

Menyelesaikan sistem persamaan linear 3 peubah dapat dilakukan seperti halnya pada sistem persamaan linear 2 peubah .

### CONTOH 2.3.8

Selesaikan sistem persamaan linear berbentuk

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi .

$x - 2y + z = 2$ dikalikan 2 diperoleh $2x - 4y + 2z = 4$

$2x + y + 2z = 1$ dikalikan 1 diperoleh $2x + y + 2z = 1$ -

$-5y = 3$

atau $y = -3/5$

$x - 2y + z = 2$ dikalikan 1 diperoleh $x - 2y + z = 2$

$-x + y + z = 2$ dikalikan 1 diperoleh $-x + y + z = 2$ +

$-y + 2z = 4$

dilakukan subtitusi nilai $y$ pada persamaan tersebut diperoleh

$-(-3/5) + 2z = 4$ atau $z = \frac{23}{10}$ , subtitusikan pada persamaan $-x + y + z = 2$

didapat

$-x + (\frac{-3}{5}) + \frac{23}{10} = 2$ atau $x = \frac{-9}{10}$.

## CONTOH 2.3.9

Selesaikan sistem persamaan linear berbentuk

$$2x - 2y + z = 3$$
$$x + y + 2z = -1$$
$$-x + y + z = 2$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi .

$x + y + 2z = -1$

$-x + y + z \ = 2 \quad +$

$2y + 3z = \ 1$

$2x - 2y + z = 3$ | x 1 diperoleh $2x - 2y + \ \ z = 3$

$x + y + 2z = -1$ | x 2 diperoleh $2x + 2y + 4z = -2 \ \ -$

$-3z = 5$

atau $z = \frac{-5}{3}$, dilakukan subtitusi pada persamaan $2y + 3z = \ 1$

diperoleh $2y + 3\left(\frac{-5}{3}\right) = 1$ atau $y = 3$, kemudian disubtitusikan pada

persamaan $x + y + 2z = -1$ diperoleh $x + 3 + 2\left(\frac{-5}{3}\right) = -1$ atau $x = \frac{-2}{3}$

Jadi himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah

$\{\frac{-2}{3}, 3, \frac{-5}{3}\}$.

## • RANGKUMAN

- Penyelesaian dari sistem persamaan linear dua peubah merupakan pasangan (*x, y*) yang memenuhi kedua persamaan linear tersebut.
- Ada beberapa cara dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua peubah, yaitu :

  1 . Metode Grafik.
  2. Metode Eliminasi
  3. Metode Substitusi.

4. Metode gabungan eliminasi dan substitusi.

## SOAL LATIHAN 2-3

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode grafik.

   a. $x - 2y = 3$
      $2x + y = 1$

   b. $2x + 3y = -2$
      $-x + 2y = 3$

   c. $3x - 4y - 4 = 0$
      $x + 2y = 1$

   d. $x - y = 0$
      $3x + y - 4 = 0$

   e. $5x - 2y - 4 = 0$
      $x + 2y - 1 = 0$

   f. $\frac{2x}{3y} = 1$
      $\frac{y-2}{x} = 2$

2. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode eliminasi.

   a. $2x - 2y = -2$
      $x + 2y = 5$

   b. $x + 2y = 3$
      $-x + 2y = 3$

   c. $4x - 2y - 4 = 0$
      $x + y = 3$

   d. $3x + 5y = 7$
      $3x + 2y - 4 = 0$

   e. $2x + 3y = 4$
      $x + y = 4$

   f. $\frac{3}{2x-3} = \frac{2}{y+3}$
      $x + 2y - 1 = 0$

3. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode subtitusi .

   a. $3x + 2y = 7$
      $2x - y = 1$

   b. $1/2x + 1/3y = 1$
      $-x + 2y = 3$

c. $\frac{x^2-x}{xy}=\frac{4}{7}$

$x + 2y = 1$

d. $x - 4y = 6$

$2x + 3y - 2 = 0$

e. $x + y - 3 = 0$

$\frac{3}{2x-3}=\frac{2}{y+3}$

f. $\frac{y-2}{x}=4$

$\frac{y-2}{x}=-2$

4. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan gabungan eliminasi dan subtitusi

a. $x - 2y = 3$

$2x + y = 1$

b. $2x + 3y = -2$

$-x + 2y = 3$

c. $3x - 4y - 4 = 0$

$x + 2y = 1$

d. $x - y = 0$

$3x + y - 4 = 0$

e. $5x - 2y - 4 = 0$

$x + 2y - 1 = 0$

f. $\frac{2x}{3y}=1$

$\frac{y-2}{x}=2$

5. Dua titik (2, 3) dan (-1, 1) yang dilalui oleh garis lurus ax + by = 6 , tentukan nilai a dan b ?

6. Sebuah industri pakaian jadi memproduksi 2 jenis pakian yaitu pria dan wanita, jika pada saat tertentu mendapatkan hasil penjualan sebesar Rp 250.000 dari 120 pakaian wanita dan 100 pakaian pria , demikaian pula dari 90 pakian pria dan 80 pakaian wanita mendapatkan sebesar Rp 200.000, dapatkan harga jual setiap pakaian pria dan wanita ?

7. Jumlah penduduk dari suatu kota A dan B adalah 4.000.000. akan tetapi jumlah penduduk kota A sama dengan 1.500.000 lebihnya dari 3 kali penduduk kota B dapatkan jumlah penduduk kedua kota tersebut ?

8. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

   a. $2x - 3y + z = 2$
   $x + 2y - z = 4$
   $x - y + z = 1$

   b. $x + 4y - z = 15$
   $2x - 2y + 3z = 12$
   $x + 2y - z = 10$

   c. $x - 3y = -5$
   $2x + z = 10$
   $y + 5z = 5$

9. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

   a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 10$
   $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 5$
   $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 8$

   b. $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 2$
   $\frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 3$
   $\frac{2}{x} - \frac{3}{z} = 1$

   c. $\frac{2}{z} - \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1$
   $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} - \frac{3}{z} = -1$
   $\frac{2}{x} - \frac{1}{z} = 2$

10. Diketahui persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ , tentukan nilai $a$, $b$, $c$ jika fungsi tersebut melalui titik berikut ini.

    a. (1,1), (2, 4) dan (-2, 4)
    b. (-2, 0), (2, 0) dan (0, 1).
    c. (0,-1), (-4, 0) dan (4, 0).
    d. (0, 1), (2, 0) dan (2, 1)

## 2.4 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT DUA PEUBAH

Sistem persamaan linear dan kuadrat untuk dua peubah dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y = a_1 x + b$$
$$y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \qquad (2.4.1)$$

dimana $a_1 \neq 0$, $b_1$, $a_2 \neq 0$, $b_2$, $c_2$ merupakan bilangan real.

Untuk menyelesaiakan sistem persamaan tersebut dapat dilakukan dengan cara

1. Metode subtitusi.
2. Metode grafik.

CONTOH 2.4.1

Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$$y = x + 1$$

$$y = x^2 + 2x + 1.$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut dilakukan dengan subsitusi persamaan $y = x + 1$ pada $y = x^2 + 2x + 1$ diperoleh

$x + 1 = x^2 + 2x + 1$ atau $x^2 + 2x + 1 - x - 1 = 0.$

$x^2 + x = 0$ atau $x(x + 1) = 0$ diperoleh $x_1 = 0$ dan $x_2 = -1$

Nilai-nilai $x$ disubtitusikan pada $y = x + 1$, yaitu untuk $x_1 = 0$ diperoleh $y_1 = 1$ dan untuk $x_2 = -1$ diperoleh $y_2 = 0$.

Jadi himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah

{(0, 1), (-1, 0)}.

## CONTOH 2.4.2

Selesaikan sistem persamaan berbentuk $y = x + 2$ dan $y = x^2$

Penyelesian:

$y = x + 2$

$y = x^2$

Subtitusikan persamaan $y = x + 2$ pada persamaan $y = x^2$ , akan diperoleh

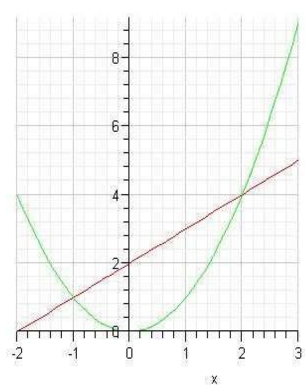
$x + 2 = x^2$ atau

$x^2 - x - 2 = 0$ , dilakukan faktorisasi diperoleh

$(x - 2)(x + 1) = 0$ dan diperoleh hasil $x_1 = 2$ dan $x_2 = -1$

Nilai-nilai $x$ disubtitusikan pada persamaan $y = x + 2$, didapat:

1. Untuk $x_1 = 2$ diperoleh $y_1 = 4$
2. Untuk $x_2 = -1$ diperoleh $y_2 = 1$




Sehingga himpunan penyelesaian adalah {(2, 4) , (-1, 1 )}.

Secara geometrik himpunan penyelesaian tersebut merupakan titik potong dari kedua persamaan, seperti yang diperlihatkan pada gambar disamping ini.

## • RANGKUMAN

- Sistem persamaan linear dan kuadrat untuk dua peubah dapat dinyatakan dalam bentuk

  $y = a_1 x + b$

  $y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$

  dimana $a_1 \neq 0$, $b_1$, $a_2 \neq 0$, $b_2$, $c_2$ merupakan bilangan real

- Ada beberapa cara penyelesaian yang dapat dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan kuadrat dua peubah, yaitu :

  1 . Metode Grafik.
  2. Metode Substitusi.

## SOAL LATIHAN 2-4

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

   a. $y = 2x$, $y = x^2 + 2x - 1$ b. $y = x$, $y = x^2 + 2x - 2$ c. $y = x + 2$, $y = x^2 + 2x - 2$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

   a. $y = x + 1$, $y = x^2 + 2x - 1$ b. $y = x - 2$, $y = x^2 + 2x - 2$ c. $y = 3x + 2$, $y = x^2 + 2x - 2$

3. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini.

   a. $y + x - 1 = 0$, $y = x^2 - 3x + 2$ b. $y - 2x - 9 = 0$, $y - x^2 + 5x - 5 = 0$ c. $y - 2x + 5 = 0$, $y = x^2 - 3x + 3$

4. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini.

   a. $y - x = 10$ b. $y - 2x = 5$ c. $y + x = 5$
   $y = x^2 - 3x + 2$ $y - x^2 + 5x - 5 = 0$ $y = x^2 - 3x + 3$

5. Dapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini.

   a. $y = x - 1$ b. $y - 2x - 9 = 0$ c. $y = -2x + 5$
   $y = x^2 - 3x + 2$ $y - x^2 + 5x - 5 = 0$ $y = x^2 - 3x + 3$

6. Tentukan konstanta $k$ agar agar sistem persamaan linear-kuadrat berikut

   $y = 6x - 10$

   $y = 2x^2 - 2x - k$

   - Mempunyai dua penyelesaian.
   - Mempunyai satu penyelesaian dan kemudian tentukan penyelesaiannya.
   - Tidak mempunyai penyelesaian.

## 2.5 PERTIDAKSAMAAN

Suatu persamaan dinyatakan dengan tanda "=". Untuk hubungan dari peubah – peubah yang menyatakan pertidaksamaan digunakan tanda $<$ (lebih kecil), $\leq$ (lebih keci sama dengan), $>$ (lebih besar), atau $\geq$ (lebih besar sama dengan. Ekspresi $y < x + 1$ merupakan suatu pertidaksamaan. Pada persamaan yang memuat hubungan diantara 2 peubah $x$ dan $y$, jika $(x, y)$ merupakan pasangan dari titik yang memenuhi $y = x + 1$, maka $(x, y)$ merupakan titik pada bidang koordinat yang terletak pada persamaan $y = x + 1$. Pada pertidaksamaan, jika pasangan $(x, y)$ memenuhi pertidaksamaan $y < x + 1$, maka pasangan $(x, y)$ berada dibawah grafik $y = x + 1$.

Daerah penyelesaian pada pertidaksamaan dengan satu peubah dapat dinyatakan pada garis bilangan.

CONTOH 2.5.1

Beberapa contoh pertidaksamaan.

1. $ax - c < d + bx$, pertidaksamaan linear dengan satu peubah.
2. $ax^2 + bx + c \geq dx$ , pertidaksamaan kuadratik.
3. $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$, pertidaksamaan pecah rasional.
4. $ax + by \leq c$, pertidaksamaan linear dengan dua peubah.

■ **Sifat-Sifat pertidaksamaan**

Jika *a, b, c,* dan *d* merupakan bilangan real, maka berlaku:

a. Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$.
b. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.
c. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.
d. Jika $a < b$ maka $a + c < b + c$, untuk sembarang *c*.

e. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.

f. Jika $a < b$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Untuk pertidaksamaan dengan tanda selain <, mempunyai sifat yang identik dengan pertidaksamaan dengan tanda <.

Penyelesaian pertidaksamaan sering terkait dengan selang atau interval. Karena itu, kita bahas terlebih dahulu tentang selang / interval.

✓ **Interval**

Himpunan tertentu yang menarik dan sering muncul dalam matematika adalah himpunan bilangan real yang dinamakan **selang** / **interval**. Secara geometrik interval merupakan sepotong garis pada garis bilangan real.

DEFINISI 2.5.1 :

Jika *a* dan *b* bilangan real dengan *a* < *b*, maka **interval tertutup** dari *a* ke *b* ditulis dengan [*a, b*] dan didefinisikan dengan:

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

Jika *a* dan *b* bilangan real dengan *a* < *b*, maka **interval terbuka** dari *a* ke *b* ditulis dengan (*a, b*) dan didefinisikan dengan:

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

Kurung siku menunjukkan bahwa titik ujung termasuk dalam interval, sedangkan kurung biasa menunjukkan bahwa titik ujung tidak termasuk dalam interval. Suatu interval dapat diperluas sampai tak hingga arah positif $(+\infty \text{ atau } \infty)$, arah negatif $(-\infty)$, atau keduanya. Simbul $-\infty \text{ atau } \infty$ bukan merupakan suatu bilangan, hanya merupakan perluasan ke arah tak berhingga negatif atau tak berhingga positif. Interval yang diperluas sampai tak terhingga dinamakan **interval tak hingga**. Interval yang titik-titik ujungya berhingga disebut **interval berhingga**. Interval berhingga yang memuat satu titik ujung, tetapi tidak memuat titik ujung yang lain disebut **interval setengah terbuka** atau **interval setengah tertutup**.

### 2.5.1 PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU PEUBAH

Pertidaksamaan linear dengan satu peubah berbentuk

$$ax + b < cx + d \qquad (2.5.1)$$

Dengan *a, b, c,* dan *d* merupakan bilangan real, dan *a* dan *c* tidak keduanya nol. Tanda < dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

Untuk mendapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut, setiap peubah dipindahkan pada ruas kanan dan setiap bilangan dipindahkan keruas kiri, atau sebaliknya. Kemudian dinyatakan dalam garis bilangan, sehingga setiap nilai *x* yang memenuhi pertidaksamaan merupakan *daerah penyelesaian*.

Jika dipunyai pertidaksamaan $ax + b < cx + d$ dengan *a, b, c,* dan *d* bilangan positif dan *a-c*≠0, maka penyelesaian dari pertidaksamaan linear tersebut dapat dilakukan sebagai berikut:

- Pindahkan *cx* ke ruas kiri, dan *b* dipindahkan ke ruas kanan, didapat $ax - cx < d - b$ atau $x < \frac{d-b}{a-c}$.
- Untuk memperjelas gambaran penyelesaian, nyatakan $x < \frac{d-b}{a-c}$ dalam garis bilangan. Langkah ini hanya untuk memperjelas gambaran penyelesaian.


GAMBAR 2.5.1 Daerah penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linear

CONTOH 2.5.2

Dapatkan daerah penyelesaian yang memenuhi $4x - 2 < 2x + 1$.

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan penyelesaian pindahkan 2*x* pada ruas kiri dan -2 pada ruas kanan. Dengan menggunakan sifat pertidaksamaan nomor 3, kedua ruas dikurangi 2*x* dan dilanjutkan dengan dikurangi -2, didapat:

$4x - 2 < 2x + 1$, atau

$\Rightarrow 4x - 2x < 1 + 2$

$\Rightarrow 2x < 3$

$\Rightarrow \; x < \frac{3}{2}$

Nyatakan $x < \frac{3}{2}$ dalam garis bilangan.


## CONTOH 2.5.3

Dapatkan daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan

$4x + 2 \leq 2x - 3$ ?

Penyelesaian:

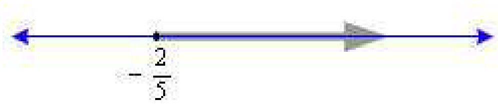
$4x + 2 \geq 2x - 3$, Kedua ruas dikurangi 2*x* dan dikurangi 2, didapat:

$4x - 2x \geq -3 - 2$

$\Rightarrow 2x \geq -5$

$\Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$

Dalam garis bilangan:



CONTOH 2.5.4

Dapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $2 - 4x > 6 + 3x$ .

Penyelesaian:

$2 - 4x > 6 + 3x$ , dipindahkan $3x$ keruas kiri dan 2 keruas kanan

$-4x - 3x > 6 - 2$, atau

$-7x > 4$, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{-1}{7}$.

$x < -\frac{4}{7}$.

## 2.5.2 PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Pertidaksamaan kuadrat berbentuk

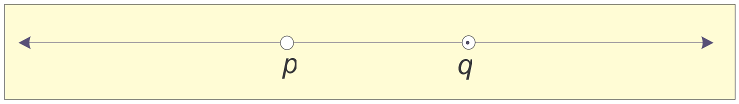
$$ax^2+bx + c < 0 \qquad (2.5.2)$$

dengan $a \neq 0$, $b$, dan $c$ adalah bilangan real. Tanda < dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat, dilakukan dengan cara:

- Rubahlah pertidaksamaan menjadi bentuk (2.5.2), dan lakukan pemfaktoran bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c = (x - p)(x - q)$.
- Tentukan nilai-nilai $x$ yang mengakibatkan $(x - p)(x - q) = 0$, yaitu $x = p$ dan $x = q$. Gambarkan $x = p$ dan $x = q$ pada garis bilangan, diperoleh titik yang membagi garis bilangan menjadi selang-selang

yang merupakan daerah uji untuk setiap nilai $x$ yang memenuhi pertidaksamaan. Jika kita anggap $p < q$, maka selang-selang pada garis bilangan dapat digambarkan seperti pada Gambar 2.5.2.




GAMBAR 2.5.2 Daerah penyelesaian dari suatu pertidaksamaan kuadrat

Interval yang terbentuk adalah:

- $(-\infty, p) = \{x | -\infty < x < p\}$
- $(-\infty, p] = \{x | -\infty < x \leq p\}$
- $(p, q) = \{x | p < x < p\}$
- $[p, q] = \{x | p \leq x \leq q\}$
- $(p, q] = \{x | p < x \leq q\}$
- $[p, q) = \{x | p \leq x < q\}$
- $(p, \infty) = \{x | p < x < \infty\}$
- $[p, \infty) = \{x | p \leq x < \infty\}$

▪ Ambil titik uji $x$ pada setiap selang/interval.

  Berikan tanda $+$ di setiap interval pada garis bilangan apabila $(x-p)(x-q) > 0$.

  Berikan tanda $-$ di setiap interval pada garis bilangan apabila $(x-p)(x-q) < 0$.

▪ Penyelesaian dari pertidaksamaannya adalah interval yang memuat nilai-nilai $x$ yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

## CONTOH 2.5.5

Dapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + 5x + 6 < 0$.

Penyelesaian:

- Faktorisasi bentuk kuadrat pada pertidaksamaan.

  $x^2 + 5x + 6 < 0$

  $\Rightarrow (x + 2)(x + 3) < 0$

- Tentukan nilai-nilai $x$ yang mengakibatkan $(x+2)(x+3) = 0$,

  Untuk $(x+2) = 0$, diperoleh titik $x = -2$.

  Untuk $(x+3) = 0$, diperoleh titik $x = -3$.

  Terdapat beberapa selang/interval yang menyatakan daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan,

  yaitu: (-∞,-3), (-3, -2) , dan (-2,∞).

  Ambil titik uji pada masing-masing interval, misal $x$ = -4, $x$ = -2,5 dan $x$ = 0. Lakukanlah penghitungan tanda + dan -, akan didapat hasil seperti gambar di bawah ini.


Karena yang diminta soal adalah nilai-nilai yang lebih kecil nol, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang bertanda –, yaitu (-3, -2).

Atau, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \in R \text{ dan } -3 < x < -2\}$

## CONTOH 2.5.6

Dapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $2x^2 \geq x + 2$.

Penyelesaian:

- Faktorisasi bentuk kuadrat pada pertidaksamaan.

  $2x^2 \geq x + 2$

  $\Rightarrow 2x^2 - x - 2 \geq 0$

$\Rightarrow (2x+1)(x-2) \geq 0$

- Tentukan nilai-nilai *x* yang mengakibatkan $(2x+1)(x-2) = 0$,

  Untuk $(2x+1) = 0$, diperoleh titik $x = -\frac{1}{2}$.

  Untuk $(x-2) = 0$, diperoleh titik $x = 2$.

  Terdapat beberapa selang yang menyatakan daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan,

  yaitu: $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 2)$ , dan $(2, \infty)$.

  Ambil titik uji pada masing-masing interval, misal *x* = -1, *x* = 0, dan *x* = 3. Lakukanlah penghitungan tanda + dan -, akan didapat hasil seperti gambar di bawah ini.


Karena yang diminta soal adalah nilai – nilai yang lebih besar atau sama dengan nol, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang bertanda —,

yaitu $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ atau $[2, \infty)$.

Atau, himpunan penyelesaiannya adalah

$$\left\{ x \middle| x \leq -\frac{1}{2} \text{ dan } x \geq 2, x \in R \right\}.$$

## 2.5.3 PERTIDAKSAMAAN PECAH RASIONAL

Bentuk pecah rasional yang akan dibahas disini adalah yang mempunyai pembilang linear dan penyebut berbentuk linear ataupun kuadratik.

| |
|---|
| Pertidaksamaan pecah rasional berbentuk |

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 0 \qquad (2.5.3)$$

atau

$$\frac{ax+b}{cx^2+dx+c} < 0 \qquad (2.5.4)$$

dengan $a \neq 0$, $b$, $c \neq 0$, dan $d$ adalah bilangan real. Tanda $<$ dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

Untuk mendapatkan penyelesaian pertidaksamaan pecah rasional, dilakukan dengan cara:

- Rubahlah pertidaksamaan menjadi bentuk (2.5.3) atau (2.5.4), Apabila ada bentuk kuadrat, lakukan pemfaktoran pada bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c = (x-p)(x-q)$.
- Tentukan nilai-nilai $x$ yang mengakibatkan pembilang nol dan penyebut nol. Gambarkan titik-titik pembuat nol ini pada garis bilangan, diperoleh titik yang membagi garis bilangan menjadi selang-selang yang merupakan daerah uji untuk setiap nilai $x$ yang memenuhi pertidaksamaan.
- Ambil titik uji $x$ pada setiap interval.

  Berikan tanda $+$ di setiap interval pada garis bilangan apabila ruas kiri bernilai positif.

  Berikan tanda $-$ di setiap interval pada garis bilangan apabila ruas kiri bernilai negatif.
- Daerah penyelesaian dari pertidaksamaan pecah rasional adalah interval yang memuat nilai-nilai $x$ yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

## CONTOH 2.5.7

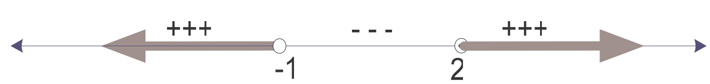
Dapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{2x-4}{x+1} > 0$ ?.

Penyelesaian:

- Tentukan nilai-nilai $x$ yang mengakibatkan pembilang nol dan penyebut nol.

  Dari pembilang: $2x - 4 = 0$ diperoleh $x = 2$ dan
  Dari Penyebut: $x + 1 = 0$ diperoleh $x = -1$.

  Terdapat beberapa interval yang pada garis bilangan, yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, dan $(2, \infty)$. Ambil titik uji pada masing-masing interval antara lain $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$.




Karena yang diminta adalah yang lebih besar nol, maka terlihat pada gambar di atas bahwa daerah penyelesaian adalah daerah yang bertanda + yaitu $(-\infty, -1)$ dan $(2, \infty)$.

## CONTOH 2.5.8

Dapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-4}{x+1} > 2$ ?.

Penyelesaian:

- Pertidaksamaan dibawa kedalam bentuk (2.5.3) atau (2.5.4) sebgai berikut.

$$\frac{x-4}{x+1} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+1} - 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} > 0$$

- Tentukan nilai-nilai $x$ yang mengakibatkan pembilang nol dan penyebut nol.

  Dari pembilang: $-x - 6 = 0$ diperoleh $x = -6$ dan
  Dari Penyebut: $x + 1 = 0$ diperoleh $x = -1$.

  Terdapat beberapa selang , yaitu $(-\infty, -6)$, $(-6, -1)$, dan $(-1, \infty)$.

  Ambil titik uji pada masing-masing selang, misal $x = -7$, $x = -2$, $x = 0$ dan didapat hasil tanda seperti pada gambar di bawah ini.


Karena yang diminta soal adalah nilai-nilai yang lebih besar nol, daerah penyelesaiannya adalah yang bertanda +, yaitu $(-6, -1)$.

## 2.5.4 MENERAPKAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

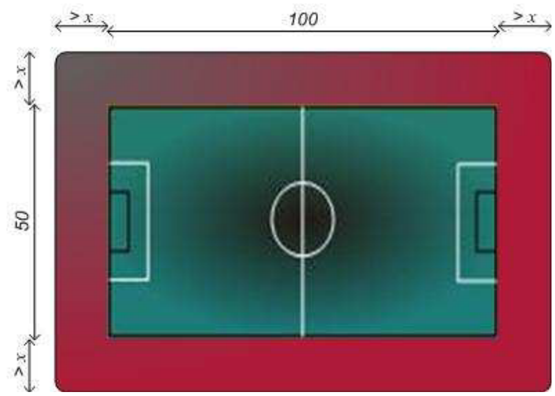
Berikut ini akan diberikan beberapa contoh pemakaian pertidaksamaan kuadrat untuk menyelesaikan persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Penerapan ini akan disajikan dalam bentuk contoh-contoh.

CONTOH 2.5.9

Pada luar lapangan sepak bola yang berukuran 100 *m* × 50 *m,* akan dibuat jalur lari dengan lebar jalur tetap. Jalur tersebut mengelilingi lapangan sepak bola. Jika luas jalur tersebut tidak boleh kurang dari 2.500 $m^2$, maka tentukan minimal lebar jalur tersebut.

**Penyelesaian:**

Misalkan lebar jalur yang harus dibuat adalah *x m*, lihat Gambar 2.5.3.




GAMBAR 2.5.3 Jalur lari mengelilingi lapangan sepak bola

Luas jalur dalam $m^2$ adalah

$$L = 2(100x) + 2(50x) + 4x^2 = 300x + 4x^2$$

Karena luas jalur adalah 2.500 $m^2$, maka :

$$2.500 \leq 4x^2 + 300x$$

$$x^2 + 75x - 2.500 \geq 0$$

$$(x+100)\ (x-25) \geq 0$$

- Tentukan nilai-nilai *x* yang mengakibatkan $(x+100)(x-25) = 0$,

  Untuk $(x+100) = 0$, diperoleh titik $x = -100$.

  Untuk $(x-25) = 0$, diperoleh titik $x = 25$.

Terdapat beberapa selang yang menyatakan daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan, yaitu: (-∞,-100), (-100, 25), dan (25, ∞).

Ambil titik uji pada masing-masing interval, misal $x$ = -200, $x$ = 0 dan $x$ = 100. Lakukanlah penghitungan tanda + dan -, akan didapat hasil seperti gambar di bawah ini.


Karena yang diminta soal adalah nilai-nilai yang lebih besar sama dengan nol, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang bertanda ++ yaitu (-∞, -100] atau [25, ∞). Atau, himpunan penyelesaiannya adalah

$\{x \mid x \in R, x \leq -100 \text{ atau } x \geq 25\}$.

Karena nilai $x > 0$, maka diperoleh $x \geq 25$ *m.*

Jadi lebar jalur di sisi lapangan sepak bola tersebut minimal 25 *m.*

## CONTOH 2.5.10

Sebuah perusahaan melakukan penjualan $x$ unit barang per minggu. Harga $p$ (dalam ribuan) rupiah per unit dinyatakan dalam $p$=188-2$x$. Biaya produksi $x$ unit barang adalah $c$ = 200+4$x$ rupiah (dalam ribuan). Berapa unit barang yang harus diproduksi dan laku terjual untuk dapat memperoleh laba paling sedikit 4 juta rupiah per minggu ?.

**Penyelesaian:**

Banyaknya unit adalah $x$ dan harga per unit adalah (188-2$x$), diperoleh:

- ✓ Pendapatan = $x(188-2x) = 188x - 2x^2$
- ✓ Biaya $x$ unit = 200 + 4$x$
- ✓ Keuntungan = Pendapatan – Biaya

$$= 188x - 2x^2 - (200 + 4x)$$
$$= -2x^2 + 184x - 200$$

Dinyatakan bahwa laba paling sedikit 4 juta rupiah per minggu, atau 4000 dalam ribuan. Oleh karena itu, diperoleh

$-2x^2 + 184x - 200 \geq 4000$

$\Rightarrow -2x^2 + 184x - 4200 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 92x + 2100 \leq 0$

$\Rightarrow (x-50)(x-42) \leq 0$

Mirip dengan langkah sebelumnya, carilah titik-titik pembuat nol dan lakukan uji di beberapa titik. Akan didapat interval-interval pada garis real sebagai berikut.


Karena yang diminta soal adalah nilai-nilai yang lebih kecil sama dengan nol, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang bertanda – yaitu

$42 \leq x \leq 50.$

Jadi banyaknya barang yang diproduksi per minggu paling sedikit 42 dan paling banyak 50.

## • RANGKUMAN

- Pertidaksamaan linear dengan satu peubah berbentuk

$$ax + b < cx + d$$

Dengan *a, b, c,* dan *d* merupakan bilangan real, dan *a* dan *c* tidak keduanya nol.

Tanda < dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

- Pertidaksamaan kuadrat berbentuk

$$ax^2+bx + c < 0$$

dengan $a≠0$, *b,* dan *c* adalah bilangan real. Tanda < dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

- Pertidaksamaan pecah rasional berbentuk

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{ax+b}{cx^2+dx+c} < 0$$

dengan $a≠0$, *b,* $c≠0$, dan *d* adalah bilangan real. Tanda < dapat digantikan dengan tanda pertidaksamaan lainnya.

.

## SOAL LATIHAN 6-2

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a. $x - 3 > 0$ b. $-4x > 4$ c. $8 - 4x < 12$

d. $4x + 2 \leq 12$ e. $\frac{2}{x} > 3$ f. $\frac{2}{x-2} < \frac{2}{3}$

g. $3x + 5 < 5x - 7$ h. $2 - 4x \geq 6x - 2$ i. $6x + 6 < 12 - 24x$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

   a. $3 \le 2x - 7 < 5$ b . $2x + 1 < 3x + 5 < 2x + 6$

   c. $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} < \frac{x}{4} + \frac{5}{6}$ d. $x-1 < 2x + 1 \le 3 + x$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

   a. $\frac{2x+4}{3x+2} > 0$ b. $\frac{6}{2x+4} < \frac{3x}{2x-4}$ c. $\frac{-5}{x-3} + 2x + 1 > 0$

   d. $\frac{2-x}{x-2} \ge \frac{2-x}{x-2}$ e. $\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+2} \ge 0$ f. $\frac{2x+3}{x} > \frac{5}{6}$

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

   a. $\frac{2x^2-3x+2}{x^2-5x+6} < 0$ b. $\frac{x^2-4x+5}{x^2-x-2} > 0$ c. $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x+1} \le 0$

   d. $\frac{x^2+2}{3x} > \frac{x^2-x}{x}$ e. $\frac{x^2-1}{x^2-2} > \frac{x-1}{2}$ f. $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} < 0$

5. Sebuah perusahaan melakukan penjualan $x$ unit barang per minggu. Harga $p$ (dalam ribuan) rupiah per unit dinyatakan dalam $p$=250-$x$. Biaya produksi $x$ unit barang adalah $c$ = 200+$x$ rupiah (dalam ribuan). Berapa unit barang yang harus diproduksi dan laku terjual untuk dapat memperoleh laba paling sedikit Rp 100.000 per minggu ?.
6. Sebuah penerbit menjual 5.000 buku, masing-masing dengan harga Rp 2.500. Jika harga dinaikkan Rp 500, maka penjualan berkurang 300 buku. Berapa harga maksimum yang harus dikenakan agar penerimaan paling sedikit Rp 15.000.000.

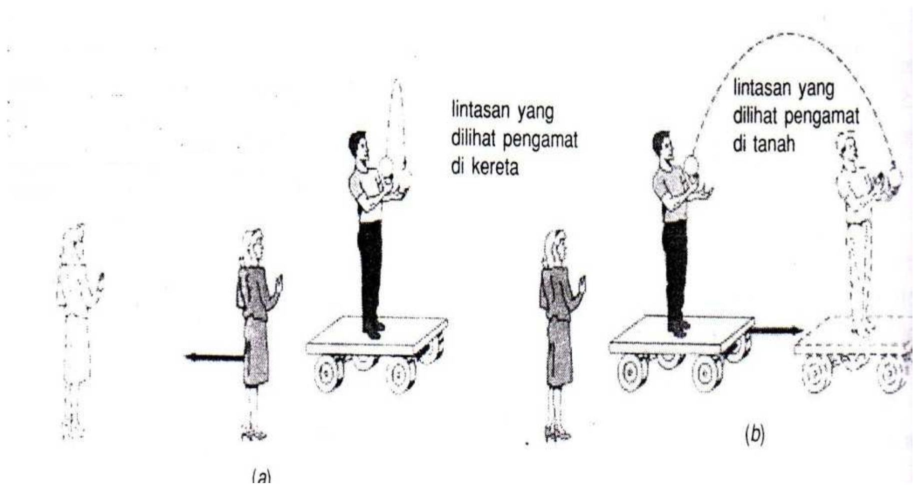
Bab

3

# FUNGSI

Pernahkah anda memperhatikan gerakan bola yang dilempar ke atas oleh seseorang. Secara tidak langsung ternyata anda telah memperhatikan gerakan bola tersebut membentuk sebuah fungsi yang disebut dengan *Fungsi Parabola* (Gambar 6.1.1). Gambar *a* memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika pengamat berada pada sebuah kereta yang bergerak searah gerakan pelempar bola, sedang gambar *b* juga memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika dilihat pengamat yang diam di tanah.

Pada bab ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan fenomena yang diilustrasikan diatas yaitu berkaitan dengan relasi dan fungsi, kemudian dilanjutkan dengan permasalahan yang terkait dengan fungsi yaitu persamaan fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.




**Gambar 6.1.1** Sumber : ”*Fisika*”Tipler

## 2.6 FUNGSI DAN RELASI

Topik penting yang sering dijumpai dalam matematika adalah relasi dan fungsi. Kedua topik ini muncul karena adanya hubungan atau ketergantungan antara satu besaran dengan besaran lainnya. Seringkali, hubungan ini didapatkan dari permasalahan yang kita hadapi sehari-hari. Sebagai contoh, adanya hubungan antara pegawai pada suatu perusahaan dengan bagian/departemen tertentu pada perusahaan tersebut, hubungan antara luas lingkaran dengan panjang jari-jarinya, hubungan antara nama-nama siswa dalam suatu kelas dengan kesukaan (hobby)nya, hubungan antara nama-nama kabupaten di suatu propinsi dengan jumlah penduduknya, hubungan antara biaya produksi dengan jumlah produk yang dihasilkan oleh sebuah pabrik, dan lain-lain.

Dari beberapa contoh diatas, dapat dimengerti bahwa suatu relasi terjadi antara satu kelompok tertentu dengan kelompok lainnya, misalnya antara kelompok siswa dengan kelompok hoby. Dalam matematika, istilah kelompok ini dikenal dengan istilah **himpunan**. Setiap himpunan mempunyai anggota (himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong). Dalam penulisannya, suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital (huruf besar), misal A, B, C,.... sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, misal a, b, c, .... **Relasi** dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memadankan/ memetakan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B. Untuk memperjelas konsep ini, perhatikan Contoh 6.1.1 yang menyatakan relasi antara himpunan siswa dengan himpunan kesukaan:

CONTOH 2.6.1

A = himpunan siswa dalam suatu kelas

= {Agus, Bima, Cakra, Durna}

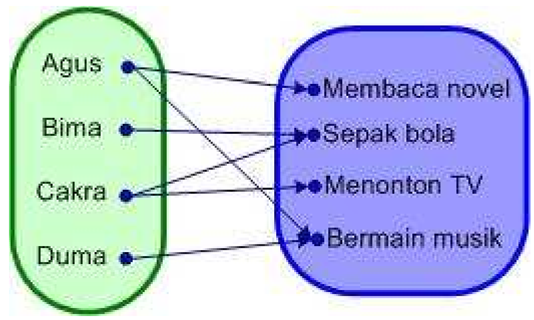
B = himpunan kesukaan

= {membaca novel, sepak bola, menonton TV, bermain musik}

Relasi antara kedua himpunan misalkan ditentukan berikut:

- ✓ Agus suka membaca novel dan bermain musik
- ✓ Bima menyukai sepakbola
- ✓ Durna suka bermain musik
- ✓ Cakra suka sepakbola dan menonton TV

Relasi ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram berikut:




Gambar 6.1.1

atau dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut sebagai berikut:

{(Agus, membaca novel), (Agus, bermain musik), (Bima, sepakbola), (Durna, bermain musik), (Cakra, sepakbola), (Cakra, menonton TV)}

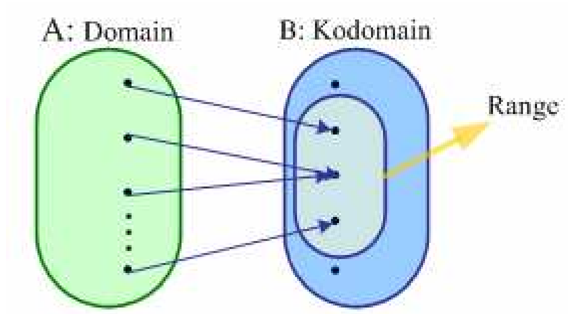
Fungsi merupakan salah satu bentuk khusus dari relasi. Misalkan A dan B adalah dua himpunan, dimana anggota himpunan B tergantung pada anggota himpunan A. misalkan pula x adalah anggota A dan y adalah anggota B. **Fungsi** dari A ke B adalah aturan yang memadankan setiap anggota dalam himpunan A dengan tepat pada satu anggota dalam himpunan B. Kita dapat mendefinisikan secara formal dalam definisi 6.1.1 berikut.

DEFINISI 2.6.1:

Sebuah **fungsi *f*** adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek $x$ dalam satu himpunan yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh disebut **daerah nilai** fungsi tersebut.

Dengan kata lain, pemetaan dari $x$ terhadap $y$ disebut fungsi jika:

- untuk setiap $x$ dalam A dapat dicari nilai $y$ dalam B yang merupakan nilai/ pasangannya. Elemen $x$ di A dihubungkan oleh $f$ dengan elemen $y$ di B, ditulis $xfy$ atau $\boldsymbol{y=f(x)}$.
- untuk satu $x$ kita mempunyai satu dan hanya satu nilai y.

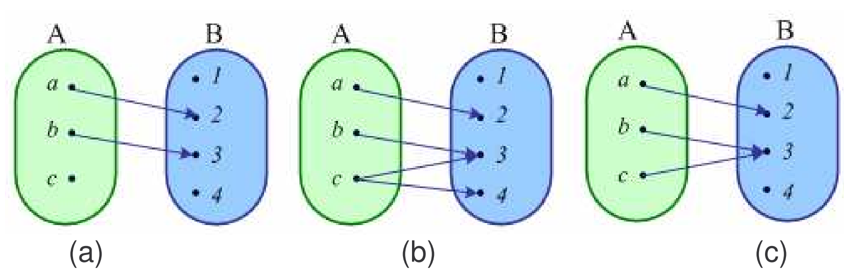



Gambar 6.1.2

Himpunan A disebut daerah asal atau **domain** dan himpunan B disebut daerah kawan atau **kodomain**. Himpunan bagian dari B, misalkan R, yang berisi nilai-nilai yang merupakan hasil dari pemetaan fungsi atas anggota dari daerah asal disebut daerah hasil atau **range**. Untuk memperjelas konsep diatas, perhatikan dua contoh berikut ini.

CONTOH 2.6.2

Diberikan 3 contoh relasi pada Gambar 6.1.3 (a), (b), dan (c), tentukan mana yang fungsi dan yang bukan fungsi.




Gambar 6.1.3

Jawab:

Relasi pada Gambar 6.1.3(a) bukan merupakan fungsi, karena elemen $c$ di daerah asal tidak dipetakan pada daerah hasil. Relasi pada Gambar

6.1.3(b) bukan merupakan fungsi, karena elemen *c* mempunyai kawan lebih dari satu di daerah hasil. Relasi pada Gambar 6.1.3(c) merupakan fungsi, karena setiap elemen dari domain mempunyai satu kawan di daerah hasil. Pada Gambar 6.1.3(c), domain fungsi adalah himpunan A dan kodomainnya adalah B. Karena nilai fungsi hanya 2 dan 3 saja maka daerah hasil (*range*) fungsi adalah R = {2, 3}.

## CONTOH 2.6.3

Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d*. Berdasarkan data selama penyelaman yang dilakukan,

hubungan antara *p* dan *d* tersebut dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

| kedalaman (*d*) | Tekanan cairan (*p*) |
|---|---|
| 10 meter | 2,1 atm. |
| 20 meter | 3,2 atm. |
| 30 meter | 4,3 atm. |
| 40 meter | 5,4 atm. |
| 50 meter | 6,5 atm. |
| 60 meter | 7,6 atm. |
| 70 meter | 8,7 atm. |
| 80 meter | 9,8 atm. |
| 90 meter | 10,9 atm. |

Tentukan apakah hubungan tersebut menyatakan fungsi ?.

Jawab:

Pada contoh diatas, pemetaan dari A ke B dapat digambarkan sebagai berikut : kawan dari 10 adalah 2,1, kawan dari 20 adalah 3,2 dan kawan dari 30 adalah 4,3 dan seterusnya. Hukum fisika juga mengatakan bahwa tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d*. Jadi tidak mungkin terjadi pada kedalaman yang sama mempunyai tekanan yang berbeda. Jadi *f* merupakan fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

*f*(10) = 2,1, *f*(20) = 3,2, dan *f*(30) = 4,3 dan seterusnya. Karena kedalaman yang diperoleh dari data: 0 $\leq d \leq$90, maka daerah asal (domain) fungsi tersebut yaitu A adalah bilangan positip yang dapat ditulis A={*d* / 0 $\leq d \leq$90), daerah kawan (kodomain) fungsi yaitu B tekanan adalah lebih atau sama dengan 1 (satu) atau dapat ditulis B={*p* / 2,1$\leq p \leq$10,9}.

## 2.6.1 JENIS-JENIS FUNGSI

Ditinjau dari cara mengkawankannya, fungsi dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu fungsi *injektif*, *surjektif*, dan *bijektif*. Jenis fungsi tersebut ada kaitannya dengan sifat pemetaan dari daerah asal ke daerah hasil . Ketiga jenis fungsi tersebut adalah :

ii) Fungsi Injektif
iii) Fungsi Surjektif
iv) Fungsi Bijektif

### DEFINISI 2.6.2:

Misalkan *f* adalah fungsi dari himpunan A ke B maka:

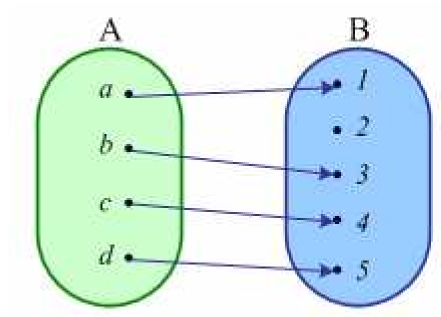
*i)* Fungsi *f* disebut ***injektif*** jika untuk setiap elemen *y* di daerah nilai, *y* paling banyak mempunyai satu kawan dari *x* di A. Dengan kata lain, *fungsi injektif* adalah *fungsi satu-satu.*

ii) Fungsi *f* disebut ***surjektif*** jika untuk setiap elemen *y* di B habis dipetakan oleh anggota himpunan di A.

Fungsi *f* disebut ***bijektif*** jika fungsi itu injektif dan surjektif

### CONTOH 2.6.4

Diketahui fungsi *f* dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 8.1.4 Tunjukkan bahwa fungsi tersebut injektif.



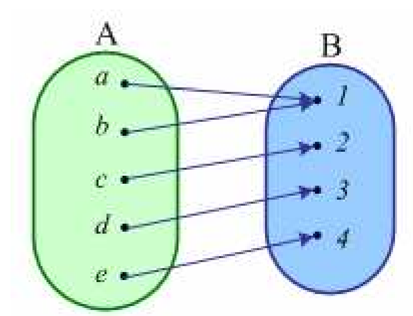

Gambar 6.1.4

Jawab:

Pertama dicari dulu daerah hasil (range) fungsi tersebut yaitu {1,3,4,5} dan kodomain B = {1, 2, 3, 4, 5}. Sekarang kita selesaikan persamaan *f(x)* = *y* jika *y* anggota {1, 3, 4, 5} di daerah hasil. y=1 merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu *x*=a. Jika *y* = 3 merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu *x*=b. Demikian juga, jika *y* = 4, 5 maka merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu masing-masing c dan d. Dengan demikian, *f* adalah injektif (fungsi satu-satu).

CONTOH 2.6.5

Diketahui fungsi *f* dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.5. Tunjukkan bahwa fungsi itu surjektif.




Gambar 6.1.5

Jawab:

Dari gambar tampak bahwa A = (*a, b, c, d, e* } dan B = {1, 2, 3, 4}.

Kemudian kita uji persamaan $f(x)=y$ dengan $y$ semua kemungkinan elemen di B.

Jika $y=1$ maka persamaan tersebut merupakan pemetaan $f(a)= 1$, $f(b)=1$.

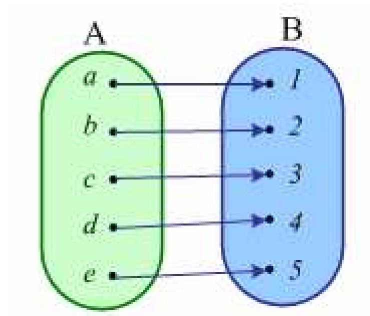
Kemudian untuk $y=2$ merupakan pemetaan dari $f(c)=2$.

Demikian pula untuk $y=3$ merupakan pemetaan dari $f(d)=3$ dan untuk $y=4$ diperoleh dari pemetaan $f(e)=4$.

Karena untuk semua $y$, persamaan selalu mempunyai jawaban, maka fungsi yang diketahui bersifat surjektif.

## CONTOH 2.6.6

Diketahui fungsi $f$ dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.6. Perlihatkan bahwa $f$ adalah bijektif.




Gambar 6.1.6

Jawab:

Kita harus menguji bahwa persamaan $y=f(x)$ dengan $y$ anggota B harus mempunyai jawab dan banyaknya jawab hanya satu. Dari gambar tersebut dapat dibuat tabel sebagai berikut:

| Ruas kanan $y$ | Jawab persamaan $x$ |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | b |
| 3 | c |
| 4 | d |
| 5 | e |

Karena untuk setiap y anggota B persamaan *y*=*f*(*x*) selalu merupakan teman pemetaan di *x* dan paling banyak satu, maka *f* adalah fungsi yang bersifat bijektif.

## Latihan 6.1

1. Diketahui fungsi $f(x) = x - 2$ dengan daerah asal $D = \{x|0 \leq x \leq 5, x \in R\}$
   a. Tentukan nilai fungsi untuk *x* = 0, *x* = 1, *x* = 2, *x* = 3, *x* = 4, dan *x* = 5
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi *f*
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi *f*
2. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ dengan daerah asal $D = \{x|2 \leq x \leq 5 \text{ dan } x \in R\}$.
   a. Tentukan nilai fungsi untuk x = 2, x =3, x = 4 dan x = 5
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi f
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi f.

3. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^2, x \in R$ fungsi surjektif, injektif atau bijektif. Bagaimana Anda menentukan domain fungsi supaya fungsi tersebut bersifat bijektif?
4. Tentukan daerah asal alami fungsi-fungsi berikut :

   a. $f(x) = 3x - 2$ b. $f(x) = x^2 - 2$

   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

5. Misalkan $y^2 = x$.

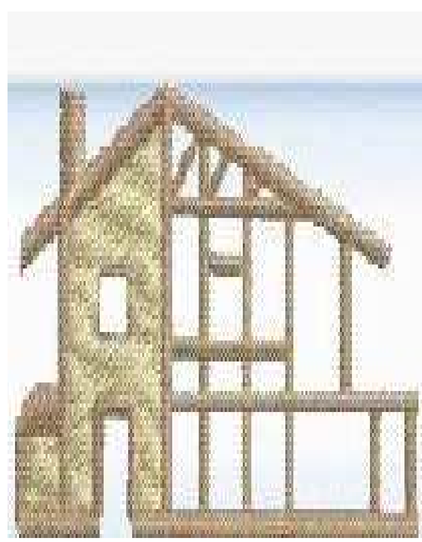
   a. Jika $x = 5$ , Carilah nilai $y$.

   b. Apakah $y^2 = x$ merupakan fungsi.

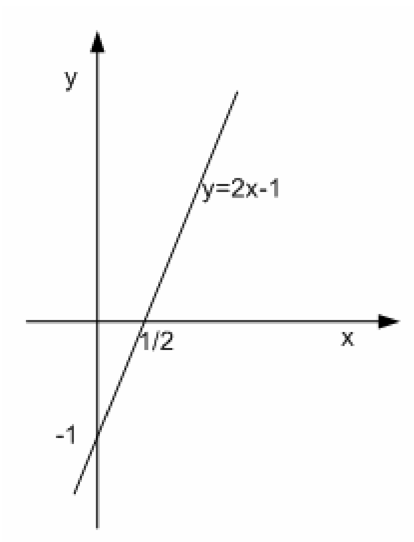
## 2.7 FUNGSI LINEAR

Suatu fungsi $y$=$f$($x$) disebut fungsi linear jika aturan untuk mengawankan antara $x$ dan $y$ yang berbentuk $y = mx + b$

dengan m dan $b$ adalah bilangan r Daerah definisi dan daerah h terbesar dari fungsi ini ada himpunan bilangan real. Jika fu ini dinyatakan dalam bentuk gr maka grafik dari fungsi ini a berbentuk garis lurus, dengan menyatakan nilai kemiringan g terhadap sumbu $X$ dan b ada perpotongan garis dengan sumbu



Ciri khas fungsi linear adalah dia tumbuh pada laju tetap. Sebagai contoh, Gambar 6.2.1 menunjukkan grafik fungsi linear $y = 2x - 1$ dan tabel nilai fungsi untuk beberapa nilai *x*. Perhatikan bahwa jika nilai *x* bertambah 1, maka nilai *y* bertambah 2. Sehingga nilai *y* bertambah 2 kali lebih cepat dari *x*. Jadi, kemiringan grafik $y = 2x - 1$ yaitu 2, dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan *y* terhadap *x*.




Gambar 6.2.1

| Nilai x | Nilai $y = 2x - 1$ |
|---|---|
| -1 | -3 |
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |

## 2.7.1 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI LINEAR

Fungsi linear mempunyai keistimewaan yaitu jika diketahui nilai dari dua anggota, maka aturan keseluruhannya dapat diketahui. Sifat ini serupa dengan garis. Melalui dua titik kita dapat menentukan satu garis. Dengan demikian, untuk menggambar grafik fungsi linear dapat dilakukan dengan cara berikut:

i. tentukan dua buah nilai *x* sembarang, kemudian tentukan nilai *y* untuk masing-masing nilai *x* berdasarkan aturan fungsi tersebut, sehingga kita dapatkan dua buah titik yang memenuhi fungsi tersebut

ii. plot dua titik tersebut pada bidang koordinat, kemudian hubungkan kedua titik tersebut sehingga akan terbentuk garis lurus. Garis lurus inilah grafik fungsi linear $y = mx + b$

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan contoh berikut.

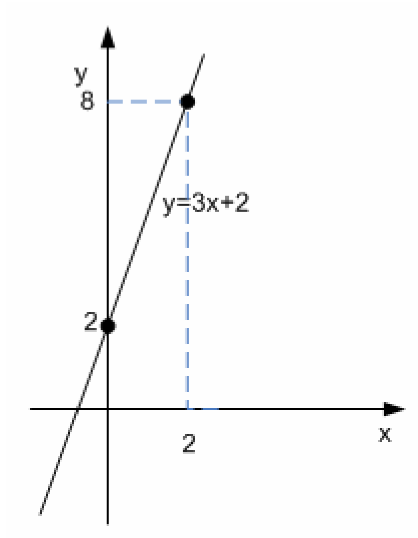
### CONTOH 2.7.1

Diketahui fungsi linear $y = 3x + 2$. Gambarlah grafik fungsi tersebut.

Jawab:

Pertama, pilihlah dua titik *x*, misalkan *x*=0 dan *x*=3. Kemudian hitung nilai *y* untuk masing-masing nilai *x*. Untuk *x* = 0 maka *y* = 3.0 + 2 = 2, sehingga didapatkan titik yang memenuhi fungsi tersebut yaitu (0, 2) dan untuk *x* = 2 maka y = 3.2 + 2 = 8 sehingga didapatkan titik (2,8).

Grafik fungsi $y = 3x + 2$ berupa garis lurus, sehingga cukup menghubungkan keduatitik (0,2) dan (2,8), sehingga kita dapatkan grafiknya gambar 6.2.2

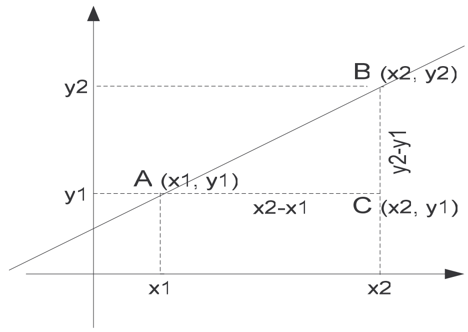



Gambar 6.2.2: Grafik fungsi $y = 3x + 2$

Karena bentuk umum dari fungsi linear $y = mx + b$ merupakan persamaan garis lurus, maka kita bisa menentukan persamaan grafik fungsi linear (garis lurus) dengan beberapa cara, antara lain:

- menentukan persamaan garis lurus jika diberikan dua titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui gradien dan satu titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui grafiknya

Seperti dijelaskan diatas, pada persamaan garis lurus $y = mx + b$ , nilai *m* merupakan kemiringan garis terhadap sumbu *X* atau lebih dikenal dengan istilah ***gradien*** garis lurus tersebut. Sebagai contoh, persamaan garis $y = 3x + 2$ mempunyai gradien 3 dan persamaan $y = -x - 3$ mempunyai gradien -1. Jadi, untuk menentukan persamaan garis lurus, kita harus bisa menentukan dan mendapatkan gradien garis tersebut (Gambar 6.2.3). Misalkan garis ini melalui dua titik A $(x_1, y_1)$ dan B $(x_2, y_2)$. Dari gambar tersebut dapat diperoleh kemiringan garis tersebut. Untuk mendapatkan gradien garis lurus, perhatikan gambar garis lurus berikut:




Gambar 6.2.3

Dari gambar garis lurus diatas, dapat dibuat suatu segitiga siku-siku ACB. Dapat ditunjukkan bahwa gradien garis lurus adalah:

$$grad_{AB} = m_{AB} = \frac{panjang\ sisi\ tegak\ BC}{panjang\ sisi\ miring\ AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dengan $x_2 \neq x_1$.

CONTOH 2.7.2

Tentukam Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8)

Jawab:

Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

## 2.7.2 PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI SEBUAH TITIK DENGAN GRADIEN DIKETAHUI

Melalui sebuah titik sembarang dapat dibuat tak berhingga garis, tetapi melalui satu titik dan satu kemiringan hanya dapat dibuat satu garis.

Bagaimana cara mendapatkan Garis L : $y = mx + b$ yang melalui sebuah titik A($x_1$,$y_1$) dengan gradien *m*. Misalkan B(*x*,*y*) adalah sembarang titik pada garis L maka pastilah persamaan garis itu adalah :

$y = mx + b$

Oleh karena persamaan garis lurus tersebut melalui sebuah titik A$(x_1, y_1)$ maka $(x_1, y_1)$ memenuhi persamaan garis L : $y = mx + b$

sehingga $y_1 = mx_1 + b$.

Dari kedua persamaan yang kita peroleh, disubtitusikan :

$y - mx = y_1 - mx_1$

atau

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (6.2.1)$$

## 2.7.3 PENENTUAN PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI DUA TITIK

Seperti dijelaskan diatas, komponen penting dalam persamaan garis $y = mx + b$ adalah gradien garis (*m*) dan komponen perpotongan dengan sumbu *Y* yaitu *y*(0)=b. Untuk mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui dua titik A dan B, kita bisa menentukan nilai *m* terlebih dahulu dengan rumus pencarian gradien yang melalui satu titik dengan cara sebagai berikut: Misalkan persamaan garis $y = mx + b$. Melalui titik ($x_1$,$y_1$) maka persamaan $y = mx + b$ berlaku untuk pasangan ($x_1$,$y_1$)

sehingga $y_1 = mx_1 + b$ diperoleh $b = y_1 - mx_1$. Oleh karena itu persamaan garis yang melalui titik ($x_1$,$y_1$) dan mempunyai gradien *m* adalah :

$$y = mx + b$$

$$\Rightarrow y = mx + (y_1 - mx_1)$$

$$\Rightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan cara yang sama kita bisa juga mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik B($x_2$,$y_2$) adalah:

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

yang akan menghasilkan persamaan dari sebuah garis yang sama. Dengan mensubtitusikan kedua persamaan yang didapat, kita peroleh persamaan garis melalui dua buah titik :

$$\frac{y-y_2}{y_1 \quad y_2} = \frac{x-x_2}{x_1 \quad x_2} \qquad (8.2.2)$$

## 2.7.4 KEDUDUKAN DUA BUAH GARIS LURUS

Misalkan ada dua buah garis lurus $L_1$ : $y_1 = m_1 x + b$

dan $L_2$ : $y_2 = m_2 x + b$

Kedudukan $L_1$ terhadap $L_2$ tergantung pada tangen arah kedua garis tersebut, yaitu $m_1$ dan $m_2$ yang dapat diuraikan pada sifat kedudukan dua buah garis lurus sebagai berikut :

i. Jika $m_1 = m_2$ maka kedua garis $L_1$ dan $L_2$ saling sejajar.

ii. Jika $m_1 \cdot m_2 = -1$ maka kedua garis $L_1$ dan $L_2$ saling tegak lurus.

iii. Jika $m_1 \neq m_2$ dan $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ maka kedua garis berpotongan.

## 2.7.5 INVERS FUNGSI LINEAR

Jika hasil pemetaan fungsi $y = f(x)$ dipetakan lagi oleh pemetaan *g* hasilnya kembali ke titik semula yaitu *x*, $g(f(x))=x$ maka *g* dikatakan invers dari *f*. Salah satu ide menentukan invers $y = f(x)$ adalah mengubah *x* sebagai fungsi dari *y*, yaitu $x = g(y)$. Kadang-kadang proses seperti itu merupakan proses yang mudah atau ada kalanya cukup rumit. Namun untuk fungsi linear, proses mengubah $y = f(x)$ menjadi $x = g(y)$ cukuplah sederhana. Sebagai contoh fungsi linear

$$y = 5x + 1 \qquad ( y = f(x) )$$

Mengubah *x* sebagai fungsi dari *y*:

$$x = \frac{1}{5}(y - 1) \qquad ( x = g(y) )$$

Perhatikan $x = g(y)$, jika *x* diganti dengan *y* dan *y* diganti dengan *x* diperoleh fungsi $y = g(x)$, proses yang demikian ini merupakan *proses menentukan fungsi invers.* Jadi $y = g(x)$ invers dari $y = f(x)$ dan $y = f(x)$ invers dari $y = g(x)$. Secara formal fungsi invers diberikan sebagai berikut :

DEFINISI 2.7.1:

Jika $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ adalah fungsi dan jika $f(g(x)) = x$ atau $g(f(x)) = x$ maka ***f* invers dari *g*** atau ***g* invers dari *f***.

CONTOH 2.7.3

Dapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8).

Jawab:

Menentukan persamaan garis lurus melewati titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah sebagai berikut :

$$\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y-2}{8-2}=\frac{x-0}{2-0}$$

$$y = 3x+2$$

CONTOH 2.7.4

Tentukan apakah garis-garis berikut sejajar, berpotongan, jika berpotongan tentukan titik potongnya.

$p : 2y = 6x + 2$ ;  $r : y = -\frac{1}{3}x + 1$;  $s : y + 2x + 1 = 0$

Jawab :

$p$ : $2y = 6x + 2$ mempunyai gradien $m = 3$

$r$ : $y = -\frac{1}{3}x + 1$ mempunyai gradien $m = -\frac{1}{3}$

$s$ : $y = -2x - 1$ mempunyai gradien $m = -2$

Jadi garis $p$ berpotongan secara **tegak lurus** dengan garis $r$, dan garis $p$ berpotongan dengan garis $s$, garis $r$ berpotongan dengan garis $s$.

Titik potong garis *p* dan *r* adalah (0,1)

Titik potong garis *p* dan *s* adalah $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

Titik potong garis *r* dan *s*: $\left(\frac{-6}{5}, \frac{7}{5}\right)$

## CONTOH 2.7.5

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ dan jika diketahui

Jika $f^{-1}(x) = 5$ tentukan nilai *x*.

Jawab:

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ maka $x = 2(y - 1)$. Jadi $f^{-1}(x) = 2 - 2x$

dan $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(5) = -\frac{3}{2}$.

## Latihan 6.2

1. Tentukan aturan fungsi linear yang mempunyai nilai 2 di x = -3 dan mempunyai nilai -2 di *x* = -1.
2. Diketahui persamaan garis *y*=3*x*-2
   (a). Tentukan gradien dan titik potong fungsi pada sumbu y
   (b) Ujilah apakah titik (-2,-8) terletak pada garis tersebut.
   (c) Jika koordinat pertama titik pada (a) ditambah satu, bagaimana nilai dari koordinat kedua.

3. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi-fungsi linear berikut:

   (a). $y = -3 + 5$ (b). $y = -\frac{3}{2}x - 4$

   (c). $y = x + \frac{2}{5}$ (d). $2y = 3x$-5

4. Dapatkan kemiringan sisi-sisi segi tiga dengan titik sudut- titik sudut (-1,2), (6.5) dan (2,7).
5. Diketahui persamaan garis dan titik (*a, b*) pada garis tersebut. Jika koordinat pertamakita tambah satu, maka koordinat kedua akan bertambah 4. Tentukan pertambahan/pengurangan koordinat kedua jika koordinat pertama ditambah 2.
6. Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan *p* bergantung pada kedalaman *d* yang memenuhi rumus $p = kd + 1$ dengan *k* konstan.

   (a) Hitunglah tekanan pada permukaan cairan.

   (b) Jika tekanan pada kedalaman 100 meter adalalh 11 atm, hitunglah tekanan pada kedalaman 50 meter.
7. Pengelola sebuah pasar kaget pada akhir minggu mengetahui dari pengalaman bahwa jika ia menarik *x* dolar untuk sewa tempat di pasar itu, maka banyaknya lokasi *y* yang dapat disewakan diberikan

   dalam bentuk persamaan $y = 200 - 4x$.

   (a).Sketsalah grafik fungsi linear (Perhatikan bahwa sewa tiap lokasi dan banyaknya lokasi yang disewakan tidak dapat bernilai negatip)

   (b).Apa yang dinyatakan oleh kemiringan perpotongan sumbu-y dan perpotongan sumbu-x dari grafik?

8. Kaitan antara skala suhu Fahrenheit (F) dan Celsius (C) diberikan oleh fungsi linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.

   (a). Sketsalah grafik fungsi F.

   (b). Berapa kemiringan grafik dan apa yang dinyatakannya?

9. Suatu titik mula-mula berada pada posisi ((7.5), bergerak sepanjang garis dengan kemiringan $m$ = -2 ke posisi baru ($x$ , $y$)

   a). Dapatkan nilai $y$ jika $x$ = 9.

   b). Dapatkan nilai $x$ jika $y$ = 12.

10. Klasifikasikan garis-garis yang diberikan : sejajar, tegak lurus atau tidak keduanya.

    a) $y = 4x + 9$ dan $y = 4x + 9$

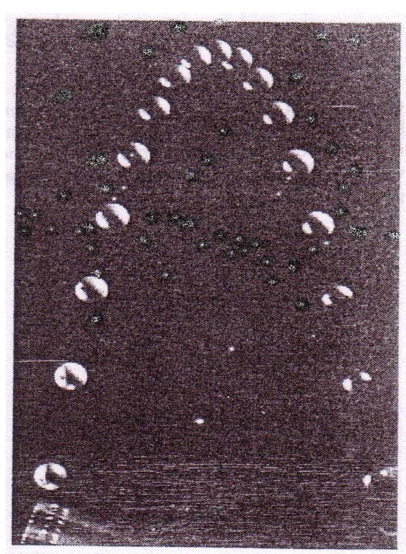
    b) $y = \frac{-3}{2}x - 4$ dan $y = 7 - \frac{1}{2}x$

    c) $10x - 6y + 7 = 0$ dan $5x - 3y + 6 = 0$

    d) $y - 2 = 4(x - 6)$ dan $y - 7 = \frac{1}{4}(x - 3)$

## 2.8 FUNGSI KUADRAT

Fungsi dari Garis lengkung_ yang m untuk dipelajari adalah fungsi mempunyai bentuk persamaan kuad



alam ini yang secara tidak langsung lengkungan yang mempunyai bentuk persamaan kuadrat telah anda kenal adalah bentuk-bentuk pada jembatan gantung, daun jendela yang lengkung, jarak yang ditempuh oleh lemparan bola secara vertical terhadap waktu (Gambar 6.3.1) dan masih banyak lagi contoh contoh fungsi kuadrat.

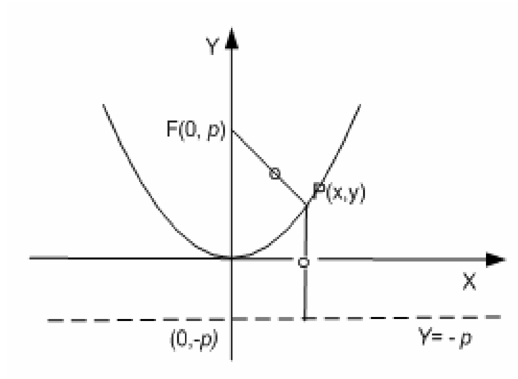
Grafik fungsi kuadrat ini disebut ***parabola*.**

***Parabola*** diperoleh dengan menentukan tempat kedudukan atau himpunan semua titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis *l* dan sebuah titik (Gambar 6.3.2). Titik tetap tersebut dikatakan *focus* dan garis tersebut dikatakan *Garis arah*. Jika fokus F disebelah atas titik asal, misalkan di $(0, p)$, garis arah kita ambil di sebelah bawah titik asal dengan persamaan $y = -p$, dan jika suatu titik $(x, y)$ terletak pada lengkungan parabola jika dan hanya jika

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p))^2}$$

atau ekivalen dengan

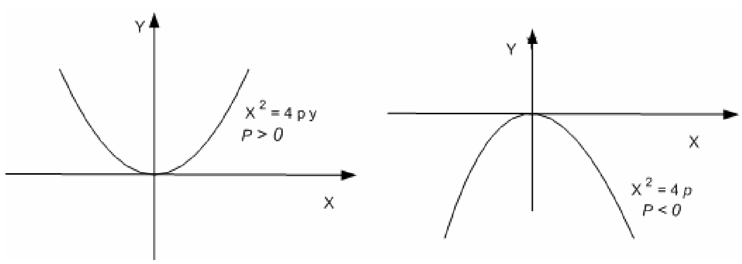
$$x^2 = 4py \qquad (6.3.1)$$




Gambar (6.3.2)

Persamaan (6.3.1) disebut ***bentuk baku*** sebuah persamaan parabola yang terbuka ke atas. Jika $p > 0$ maka $p$ merupakan jarak dari fokus ke puncaknya.

Fungsi kuadrat mempunyai 2 jenis baku yang berbentuk Parabola, tergantung dari terbukanya parabola mengarah kemana. Misalkan persamaan parabola diberikan oleh $x^2 = 4py$ , jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas dan jika $p < 0$ maka terbuka kebawah. Kedua jenis parabola itu dapat dilihat pada Gambar 6.3.3.




Gambar 6.3.3

CONTOH 2.8.1

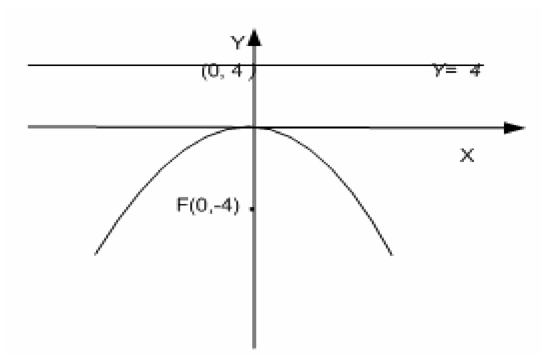
Tentukan fokus dan garis arah parabola serta sketsa parabolanya untuk persamaan $x^2 = -16y$ .

Penyalesaian :

Oleh karena persamaan parabola diketahui $x^2 = -16y$ maka parabola terbuka ke bawah dan puncaknya berada di titik asal. Fokus diperoleh dari nilai *p* untuk persamaan $x^2 = 4py$ . Dari $x^2 = -16y$ diperoleh

$x^2 = 4(-4)y$ , maka *p* = -4.

Sehingga fokus berada di ( 0,-4), dan garis arahnya adalah *y* = 4.




## 2.8.1 BENTUK UMUM PARABOLA

Bentuk umum persamaan fungsi kuadrat (parabola) yang mempunyai puncak di (*q*,*r*) adalah :

$$(x-q)^2 = 4p(y-r) \qquad (6.3.2)$$

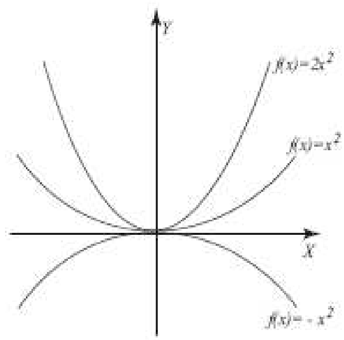
Persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk ekivalen :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (6.3.3)$$

dengan $a = -\frac{1}{4p}$ , $b = \frac{r}{2p}$ , $c = \frac{r^2 - 4pq}{4p}$.

Persamaan (6.3.3) merupakan *persamaan kuadrat dalam x* yang grafiknya berupa *parabola*. dengan *a, b* dan *c* bilangan real diketahui dan $a \neq 0$. Daerah asal terbesar dari fungsi kuadrat ini adalah seluruh bilangan real. Jika tidak dibatasi nilainya, fungsi ini mempunyai daerah asal seluruh bilangan real. Grafik parabola memiliki satu diantara dua bentuk yang ditunjukkan gambar (6.3.4) tergantung koefisien variabel yang berpangkat dua. Parabola dengan Persamaan (6.3.3) terbuka keatas jika *a* > 0, terbuka ke bawah jika *a* < 0. Dengan demikian untuk persamaan $x = ay^2 + by + c$ merupakan parabola yang terbuka ke kanan jika *a* > 0, terbuka ke kiri jika a < 0. (Persamaan $x = ay^2 + by + c$ bukan termasuk fungsi, tetapi suatu relasi yang gambarnya berupa parabola). Nilai fungsi pada suatu titik *x* = *t* dapat dihitung dengan mengganti *x* dengan *t*. Sebagai contoh, $f(x) = 2x^2 + x - 3$ adalah fungsi kuadrat dengan a = 2, b = 1 dan c = -3. Nilai *f*(*x*) untuk *x* = 2 adalah $f(2) = 2(2^2) + 2 - 3 = 7$.

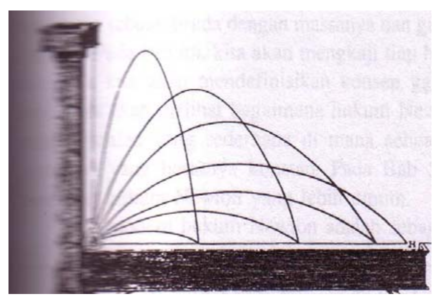
Sekarang kita tinjau kembali fungsi kuadrat yang mempunyai bentuk paling sederhana yaitu fungsi yang mempunyai aturan $f(x) = 2x^2$. Grafik fungsi ini terletak di atas sumbu *X* sebab untuk semua nilai *x*, fungsi bernilai positif. Karena nilai fungsi untuk *x* = *t* sama dengan *x* = -*t*, maka grafik fungsi ini simetri terhadap sumbu *Y* . Selanjutnya sumbu *Y* disebut *sumbu simetri*. Titik (0,0) merupakan titik paling rendah/minimum dan disebut titik balik atau puncak parabola. Sebutan yang biasa dari grafik parabola ini adalah membuka ke atas dengan titik balik minimum (0,0). Grafik dari fungsi kuadrat dengan aturan $f(x)=ax^2$ serupa dengan grafik $f(x) = x^2$, dapat diperoleh dari $x^2$ dengan mengalikan setiap koordinat dengan $a$. Grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a>0$ akan membuka ke atas. Sedangkan grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a < 0$ akan membuka ke bawah. (perhatikan Gambar 6.3.4)




Gambar 6.3.4. Grafik beberapa fungsi $y = ax^2$

## 2.8.2 MENENTUKAN PUNCAK, PERSAMAAN SUMBU SIMETRI DAN KOORDINAT FOKUS SUATU PARABOLA

Grafik parabola memiliki satu diant bentuk yang ditunjukkan dalam 6.3.5, tergantung apakah $a$ positip negatip. Dalam kedua



kasus parabola tersebut simetri terhadap garis vertikal yang sejajar sumbu $Y$. Garis simetri ini memotong parabola pada suatu titik yang disebut *puncak* parabola. Puncak tersebut merupakan titik terendah (minimum) pada kurva jika $a > 0$ dan titik tertinggi (maksimum) jika $a < 0$. Koordinat-$x$ dari puncak, atau disebut juga titik ekstrim. Parabola mempunyai Persamaan Sumbu Simetri diberikan oleh rumus:

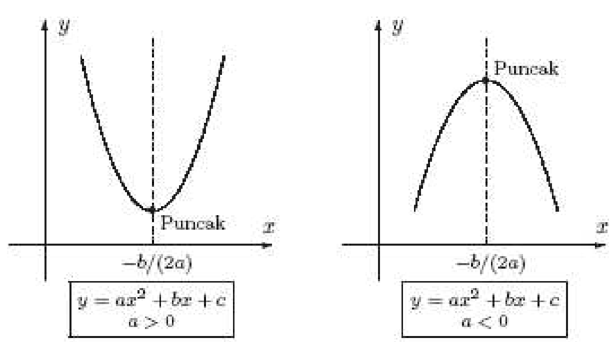
$$x = -\frac{b}{2a} \qquad (6.3.4)$$

Puncak Parabola pastilah berada pada sumbu simetri, sehingga koordinat

puncak parabola : $$(x, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \qquad (6.3.5)$$

Fokus parabola : $$p = -\frac{1}{4a} \qquad (6.3.6)$$

Dengan bantuan rumus ini, grafik yang cukup akurat dari suatu persamaan kuadratik dalam $x$ dapat diperoleh dengan menggambarkan puncak dan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinatnya atau dua titik pada tiap sisinya. Seringkali perpotongan parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-sumbu koordinat penting untuk diketahui. Perpotongannya dengan sumbu-$Y$, $y$ = c, didapat langsung dengan memberikan $x$ = 0. Untuk mendapatkan perpotongan-$x$, jika ada, haruslah diberikan $y$ = 0 dan kemudian menyelesaikan persamaan kuadrat yang dihasilkan dari $ax^2 + bx + c = 0$.




Gambar 6.3.5

CONTOH 2.8.2

Gambarkan grafik parabola dan tandai puncak dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

a) $y = x^2 - 3x - 4$

b) $y = -x^2 + x$

Penyelesaian :

**a)** Grafik fungsi $y = x^2 - 3x - 4$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(-3)}{2.1} = \frac{3}{2}$

Puncak di $(x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{(-3)^2 - 4.1.(-4)}{4.1}) = (\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

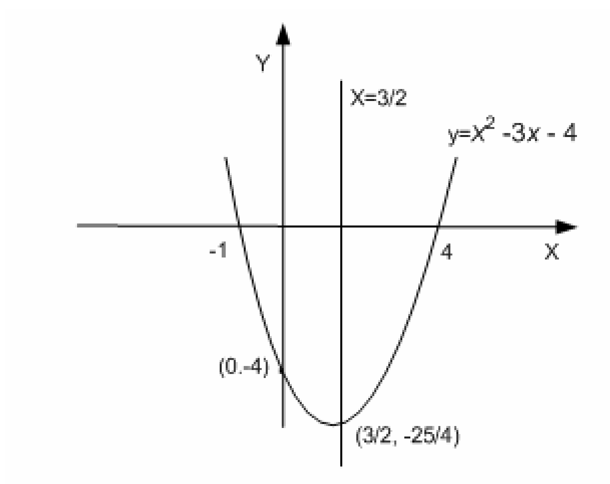
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu *Y* : $x = 0 \Rightarrow y = -4$

Dengan sumbu *X* : $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 4$

Atau $0 = (x - 4)(x + 1)$

Jadi titik potong dengan sumbu *X* di $(4,0)$ dan $(-1.0)$, dengan sumbu *Y* di $(0,-4)$



**b** ) Grafik fungsi $y = -x^2 + x$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2(-1)} = \dfrac{1}{2}$

Puncak di $(x, y) = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{(1)^2 - 4.(-1).0}{4.(-1)}) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4})$

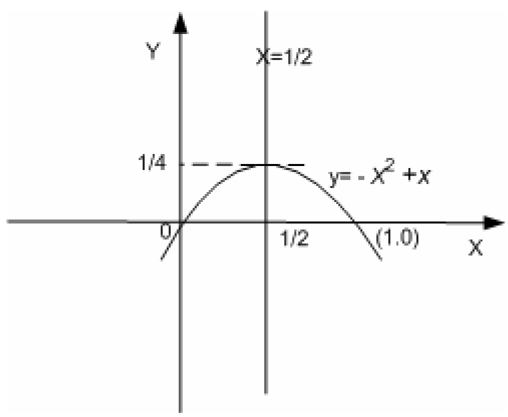
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu Y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Dengan sumbu X : $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + x$

atau $x = 0, \quad x = 1$

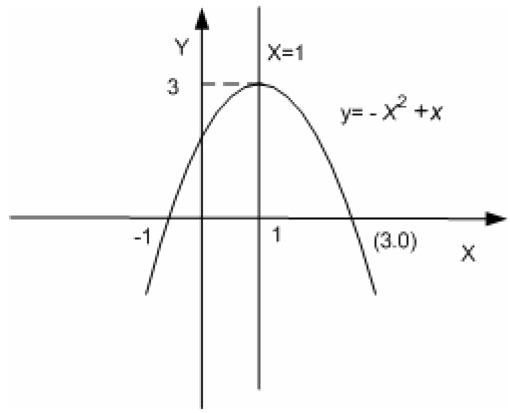
Jadi titik potong dengan sumbu di $(0,0)$ dan $(1.0)$




CONTOH 2.8.3

Diketahui kurva parabola pada gambar berikut :

Tentukanlah persamaan parabola gambar disamping.




Penyelesaian :

Parabola terbuka kebawah, tentulah koefisien dari $x^2$ bernilai negatip. Dari sumbu simetri : x = 1, maka $1 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow -2a = b$

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + (-2a)x + c$$

Grafik melalui (1,3) maka $3 = a(1) + (-2a)(1) + c \Rightarrow c = 3 + a$

Jadi persamaannya menjadi : $y = ax^2 + (-2a)x + (3 + a)$

Grafik melalui (-1,0) , maka $0 = a + 2a + (3 + a)$

atau $a = \dfrac{-3}{4}$ , selanjutnya diperoleh $b = \dfrac{3}{2}$ , $c = \dfrac{9}{4}$.

Jadi persamaan parabola dari grafik yang diberikan tersebut adalah:

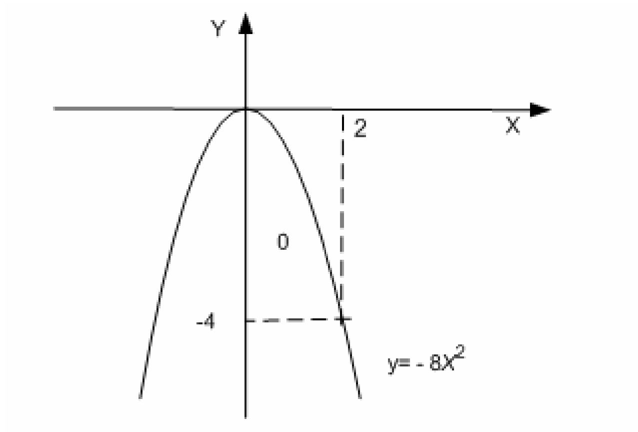
$$y = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \text{ atau } 4y = -3x^2 + 6x + 9$$

CONTOH 2.8.4

Tentukan persamaan parabola dan focus jika puncak paraboal di titik asal, yang melalui (-2,4) dan terbuka ke bawah. Gambarkanlah parabola tersebut.

Penyelesaian :

Bentuk persamaan parabola yang terbuka ke bawah dengan puncak di titik asal adalah : $x^2 = -4py$ . Oleh karena parabola melalui (2,-4) maka $(2)^2 = -4p(-4)$, Atau $p$ = 4. Jadi persamaan yang dicari adalah $x^2 = -16y$. Grafiknyasebagai berikut :




CONTOH 2.8.5

Grafik dari gerakan Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu $t$ = 0 detik jika diberikan kecepatan awal 24,5 m/det jika gesekan udara diabaikan dapat ditunjukkan bahwa jarak $s$ (dalam meter) dari bola itu ke tanah setelah $t$ detik diberikan oleh persamaan parabola :

$$s = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t} \qquad (6.3.7)$$

a) Gambarkan grafik $s$ terhadap $t$ .

b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

Penyelesaian :

a) Persamaan (6.3.7) mempunyai bentuk (6.3.3) dengan :

$a$= -4,9 < 0 jadi parabola terbuka ke bawah , $b$ = 24,5 dan $c$ = 0.

Sumbu simetri : $t = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{24{,}5}{2\,.(-4{,}9)} = 2{,}5$ det.

Dan akibatnya koordinat-*s* dari puncak parabola adalah :

$$(t,s) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}) = (\,2{,}5; -\frac{24{,}5^2 - 4(-4{,}9)(0)}{4(-4{,}9)})$$

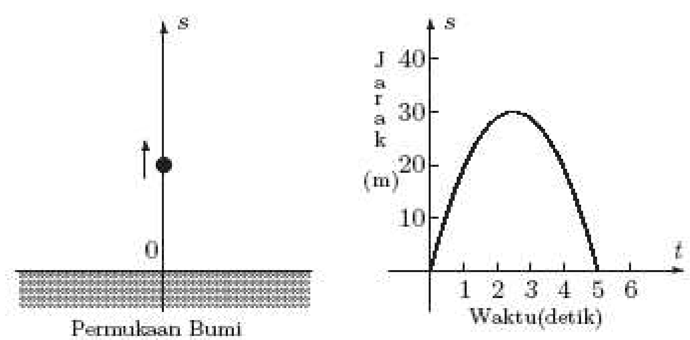
atau $(t,s) = (2{,}5 \;\; ; \;\; 30{,}625)$

Koordinat titik potong dengan sumbu *t* jiak s = 0 :

$0 = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t}$ atau $0 = 4{,}9\;\; t\;\; (\,5 - t\,)$ diperoleh: *t* = 0 atau *t* = 5.

Dari informasi puncak dan perpotongan dengan sumbu koordinat diperoleh grafik parabola Gambar 6.3.6.

b) Oleh karena puncak di $(t,s) = (2{,}5 \;\; ; \;\; 30{,}625)$ , maka tinggi maksimum lemparan bola adalah $s \cong 30{,}6$




(Gambar 6.3.6)

Sebuah sifat geometri sederhana dari parabola dijadikan dasar penggunaan dalam ilmu teknik. Menurut prinsip ilmu fisika, cahaya yang datang ke permukaan yang mengkilap, maka sudut datang sama dengan sudut pantul. Sifat parabola dan prinsip fisika ini dipakai untuk membuat lampu sorot dimana sumber cahaya lampu diletakkan pada fokus. Sebaliknya sifat ini digunakan pula dalam teleskop tertentu dimana cahaya masuk yang semua sejajar dan datang dari bintang di fokuskan pada suatu titik yaitu fokus parabola.

## CONTOH 2.8.6

Buatlah sketsa grafik dari fungsi

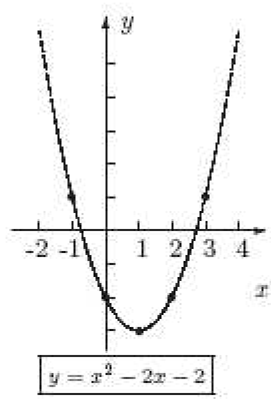
(a). $y = x^2 - 2x - 2$ (b). $y = -x^2 + 4x - 5$

Penyelesaian :

a). Persamaan $y = x^2 - 2x - 2$ merupakan persamaan kuadrat dengan *a* = 1, *b* = -2, dan *c* = -2, sehingga sumbu simetri atau koordinat-*x* dari puncaknya adalah: $x = \frac{-b}{2a} = 1$.

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.7.

| $x$ | $y = x^2 - 2x - 2$ |
|---|---|
| $-1$ | $1$ |
| $0$ | $-2$ |
| $1$ | $-3$ |
| $2$ | $-2$ |
| $3$ | $1$ |

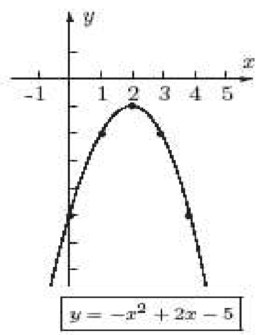



-Gambar 6.3.7

b) Persamaan $y = x^2 + 4x - 5$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a$ = -1, $b$ = 2, dan $c$ = -2, sehingga dengan koordinat-$x$ dari puncaknya adalah $x = \frac{-b}{2a} = 2$.

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.8.

| $x$ | $y = -x^2 + 4x - 5$ |
|---|---|
| 0 | $-5$ |
| 1 | $-2$ |
| 2 | $-1$ |
| 3 | $-2$ |
| 4 | $-5$ |




Gambar 6.3.8 Grafik fungsi $y = x^2 + 4x - 5$

## Latihan 6.3

Gambarkan grafik parabola dan tandai koordinat puncak (ekstrim) dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat. Tentukan jenis titik puncak, apakah titik minimum atau maksimum untuk soal nomor 1 sampai dengan 12.

1. $y = x^2 + 2$
2. $y = x^2 - 3$
3. $y = x^2 + 2x - 3$
4. $y = x^2 - 3x - 4$
5. $y = -x^2 + 4x + 5$
6. $y = -x^2 + x$

7. $y = (x-2)^2$
8. $y = (3+x)^2$
9. $x^2 - 2x + y = 0$
10. $x^2 + 8x + 8y = 0$
11. $y = 3x^2 - 2x + 1$
12. $y = x^2 + x + 2$

13. Tentukan nilai *a* jika harus memenuhi syarat yang diharuskan:

    (a). $g(x) = 2x^2 - (a+2)x - 3$, grafik mempunyai sumbu simetri di $x = -1$.

    (b). $h(x) = -x^2 - 3x + 5a - 1$, grafik mempunyai titik balik di $(\frac{-1}{6}, 1)$.

14. Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu $t = 0$ detik jika diberikan kecepatan awal 32 m/det jika gesekan udara diabaikan diberikan oleh persamaan parabola : $s = 32\,t - 16\,t^2$.
    a) Gambarkan grafik *s* terhadap *t* .
    b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

## 2.9 APLIKASI UNTUK EKONOMI

Tiga fungsi yang penting dalam ekonomi adalah :
C(*x*) =Total biaya produksi *x* unit produk selama periode waktu tertentu
R(*x*) =Total hasil penjualan *x* unit produk selama periode waktu tertentu.
P(*x*) = Total keuntungan penjualan *x* unit produk selama periode waktu tertentu.

Fungsi-fungsi itu secara berturut-turut disebut *fungsi biaya*, *fungsi pendapatan* dan *fungsi keuntungan*. Jika semua produk terjual, hubungan fungsi-fungsi itu adalah :

P(*x*) = R(*x*) - C(*x*)
[Keuntungan] = [Pendapatan] – [ biaya]

Total biaya C(x) untuk produksi $x$ unit dapat dinyatakan sebagai penjumlahan :

$$C(x) = a + M(x) \qquad (6.4.1)$$

Dengan $a$ konstanta, disebut ***overhead*** dan M($x$) adalah ***fungsi biaya pembuatan.*** **O**verhead, merupakan biaya tetap tetapi tidak tergantung pada $x$, pelaku ekonomi harus membayar tetap jika tidak ada produksi, misalnya biaya sewa dan asuransi. Disisi lain biaya pembuatan M($x$) tergantung pada jumlah item pembuatan, contoh biaya material dan buruh. Ini menunjukkan bahwa dalam ilmu ekonomi penyederhanaan asumsi yang tepat M($x$) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x) = bx + cx^2$$

Dengan $b$ dan $c$ konstanta. Subtitisi pada (6.4.1) menghasilkan :

$$C(x) = a + bx + cx^2 \qquad (6.4.2)$$

Jika perusahaan perakitan dapat menjual semua item-item produksi denga $p$ rupiah per biji, maka total pendapatan R($x$) menjadi

$$R(x) = px$$

Dan total keuntungan :

$$P(x) = [\text{total pendapatan}] – [\text{total biaya}]$$

$$P(x) = R(x) - R(x)$$

$$P(x) = px - C(x)$$

Jadi, jika fungsi biaya diberikan pada (6.4.2), maka

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \qquad (6.4.3)$$

Tergantung pada faktor-faktor seperti jumlah pekerja, jumlah mesin yang tersedia, kondisi ekonomi dan persaingan, batas atas $l$ pada jumlah item-item yang sanggup diproduksi dan dijual. Jadi selama periode waktu tetap peubah $x$ pada (6.4.3) akan memenuhi :

$$0 \le x \le l$$

Persamaan (6.4.3) merupakan suatu persamaan kuadrat dalam $x$, yang mana nilai optimum dapat ditentukan , yaitu nilai fungsi pada sumbu simetri. Dengan menentukan nilai-nilai $x$ pada [0,$l$] yang memaksimumkan (6.4.3) perusahaan dapat menentukan berapa banyak unit produksi harus dibuat dan dijual agar menghasilkan keuntungan terbesar. Masala ini diilustrasikan dalam contoh berikut:

### CONTOH 2.9.1

Pinicilin berbentuk cair dibuat oleh suatu perusahaan farmasi dan dijual borongan dengan harga Rp 2 000 per unit. Jika total biaya produksi untuk $x$ unit adalah:

$$C(x) = 5\ 000\ 000 + 800\ x + 0{,}003\ x^2$$

Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 300 000 unit dalam waktu tertentu. Berapa banyak unit-unit pinicilin harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?

Penyelesaian:

Karena total penghailan untuk penjualan $x$ unit adalah $R(x) = 2\ 000\ x$ , keuntungan $P(x)$ pada $x$ unit menjadi :

$$P(x) = R(x) + C(x) = 2\ 000\ x - (5\ 000\ 000 + 800\ x + 0{,}003\ x^2)$$

$$P(x) = -\ 0{,}003\ x^2 + 1\ 200\ x - 5\ 000\ 000$$

Dan karena kapasitas produksi terbesar adalah 300 000 unit, berarti $x$ harus terdapat pada selang [0 , 300 000]. Sumbu simetri dari fungsi keuntungan :

$$x = -\frac{1200}{2(-0{,}003)} = 200.000$$

Oleh karena titik $x = 200.000$ berada dalam selang [0 , 300 000] maka keuntungan maksimum harus terjadi pada titik balik/puncak kurva parabola yaitu di $x = 200.000$ dengan koordinat puncak parabola ::

$$(x, P(x)) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

$$= (\ 200\ 000\ ; -\frac{(1.200)^2 - 4(-0{,}003)(-5.000.000)}{4(-0{,}003)})$$

$$= (\ 200\ 000\ ; -\frac{(144.10^4 - 6.10^4)}{-12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; \frac{138.10^4}{12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; 115.10^7)$$

Jadi keuntungan maksimum P($x$) = Rp 1,15.10 $^9$ terjadi pada $x$=200.000 unit diproduksi dan dijual dalam waktu tertentu.

## • RANGKUMAN

- Fungsi $f$ disebut ***injektif*** jika untuk setiap elemen $y$ di daerah nilai, $y$ paling banyak mempunyai satu kawan dari $x$ di A.

  Fungsi $f$ disebut ***surjektif*** jika untuk setiap elemen $y$ di B habis dipetakan oleh anggota himpunan di A.

  Fungsi $f$ disebut ***bijektif*** jika fungsi itu injektif dan surjektif

- Persamaan garis lurus berbentuk:

  $$y - y_1 = m(x - x_1),$$

  $$y = mx + b,$$

  dengan $m$ adalah kemiringan garis.

- Jika $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ adalah fungsi dan $f(g(x)) = x$ atau $g(f(x)) = x$ maka ***f* invers dari *g*** atau ***g* invers dari *f***.
- Fungsi kuadrat (parabola) mempunyai bentuk

  $ax^2 + bx + c = 0$

## Latihan 6.4

1. Perusahaan Kimia menjual asam sulfur secara borongan dengan harga 100 / unit. Jika total biaya produksi harian dalam ribuan rupiah untuk $x$ unit adalah

   $C(x) = 100.000 + 50\,x + 0,0025\,x^2$

   Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 7 000 unit dalam waktu tertentu.

   a) Berapa banyak unit-unit asam sulfur harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?.

   b) Apakah akan menguntungkan perusahaan apabila kapasitas produksi perusahaan ditambah?

2. Perusahaan menentukan bahwa $x$ unit produksi dapat dijual harian pada harga $p$ rupiah per unit, dimana :

   $x = 1000 - p$

   Biaya produksi harian untuk $x$ unit adalah : $C(x) = 3.000 + 20\,x$

   (a) Tentukan fungsi penghasilan $R(x)$.

   (b) Tentukan ungsi keuntungan $P(x)$

(c) Asumsikan bahwa kapasitas produksi paling banyak 500 unit/hari, tentukan berapa banyak unit yang harus diproduksi dan dijual setiap hari agar keuntungan maksimum.

(d) Tentukan keuntungan maksimum.

(e) Berapa garga per unit harus ditentikan untuk memperoleh keuntungan maksimum.

3. Pada proses pembuatan kimia tertentu tiap hari berat $y$ dari kerusakan keluaran kimia yang larut bergantung pada total berat $x$ dari semua keluaran yang didekati dengan rumus :

$$y(x) = 0{,}01\, x + 0{,}00003\, x^2$$

dengan $x$ dan $y$ dalam kg. Jika keuntungan Rp 1 juta per kg dari kimia yang tidak rusak dan rugi Rp 200.000 per kg dari produksi kimia yang rusak, berapa kg seharusnya produk kimia diproduksi tiap hari agar keuntungan maksimum.

c. Suatu perusahaan menyatakan bahwa keuntungan yang diperoleh bergantung pada jumlah pemakaian uang untuk pemasangan iklan, Berdasarkan survey jika perusahaan menggunakan $x$ rupiah untuk iklan maka keuntungan yang diperoleh adalah

$$P(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 100$$

Tentukan jumlah uang yang harus dipakai untuk pemasangan iklan agar mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya.

d. Sebidang lahan ingin dipagari dengan syarat kelilingnya adalah 100 meter. Dengan demikian luas persegi panjang dengan keliling tersebut dapat dinyatakan dalam L ($m^2$) adalah :

$$L = x(50 - x)$$

a) Tentukan Domain dari fungsi luasan tersebut.

b) Tentukan luas terbesar yang dapat dibuat oleh kawat tersebut.

ISBN 978-602-8320-73-3
ISBN 978-602-8320-74-0

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp. 20,834.00